Orientações gerais:

(1) A avaliação tem duração de 2 horas e deve ser realizada sem consulta.

(2) Justifique cuidadosamente todas as suas respostas. Só serão aceitas respostas justificadas.

Questão 1: (2,5 pontos)

Seja a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + x^2y + y^2}{x^4 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostre que f não é contínua.

Solução:

A função f é contínua se, e somente se, para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, temos que o limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

existe e é igual ao valor que f toma em (x_0, y_0), ou seja,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) \ .$$

Para mostrar que a função f não é contínua, basta encontarmos um ponto (x_0, y_0) para o qual a igualdade acima não seja verdadeira. Vamos investigar o caso em que $(x_0, y_0) = (0, 0)$. A partir da regra da função, temos $f(0, 0) = 1$. Portanto, f será contínua em $(0, 0)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 \ .$$

Vejamos se isso é verdade. Comecemos analisando se o limite existe. Para isso, vamos considerar dois caminhos.

Caminho 1: Vamos nos aproximar do ponto $(0, 0)$ pela reta sobre o eixo x, ou seja, pela reta $y = 0$. Assim, $(x, y) = (x, 0)$ e o limite se escreve, ao longo desse caminho, na forma

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \ .$$

Caminho 2: Vamos nos aproximar do ponto $(0, 0)$ pela parábola $y = x^2$. Assim, $(x, y) = (x, x^2)$ e o limite se escreve, ao longo desse caminho, na forma

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{3x^4}{2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \ .$$

Como obtivemos valores diferentes para caminhos diferentes, o limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

não existe e, portanto, a função não é contínua em $(0, 0)$.

Questão 2: (2,5 pontos)

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = (x^2y)^{1/3}$.

(a) (0,5 ponto) Calcule $\nabla f(8,1)$.

(b) (1,0 ponto) Mostre que o plano tangente à superfície $z = f(x,y)$ no ponto $(8,1,4)$ é dado pela equação $x + 4y - 3z = 0$.

(c) (1,0 ponto) Encontre a equação do plano que é paralelo ao plano obtido no item (b) e que passa pelo ponto $(6,-2,-1)$.

Solução:

(a) Utilizando as regras de derivação, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}) = \frac{2}{3}x^{\left(\frac{2}{3}-1\right)}y^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{\left(\frac{1}{3}-1\right)} = \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}} .$$

Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}(8,1) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(8,1) = \frac{1}{3}\left(8^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{4}{3}$, ou seja, $\nabla f(8,1) = (1/3, 4/3)$.

(b) A equação do plano tangente à superfície $z = f(x,y)$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ é

$$z = ax + by + c$$

onde $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ e $c = f(x_0,y_0) - ax_0 - by_0$. Assim, tomando $x_0 = 8$ e $y_0 = 1$, temos $a = 1/3$, $b = 4/3$ e $c = 8^{\frac{2}{3}} - 8/3 - 4/3 = 0$. Portanto,

$$z = \frac{x}{3} + \frac{4y}{3} ,$$

ou seja,

$$x + 4y - 3z = 0 .$$

(c) Sabemos que o vetor (a,b,c) é normal ao plano $ax + by + cz = k$, onde k é uma constante. Assim, no caso específico em questão, temos que o vetor $(1,4,-3)$ é normal ao plano $x + 4y - 3z = 0$. Esse vetor também será normal a qualquer plano paralelo ao plano $x + 4y - 3z = 0$. Assim, todos os planos paralelos a esse plano também têm que ser da forma $x + 4y - 3z = k$. Assim, basta descobrirmos o valor de k. Para isso, substituímos $x = 6$, $y = -2$ e $z = -1$, obtendo $k = 6 + 4(-2) - 3(-1) = 1$. Assim, a equação do plano paralelo ao plano $x + 4y - 3z = 0$ que passa pelo ponto $(6,-2,-1)$ é $x + 4y - 3z = 1$.

Solução alternativa: O vetor normal ao plano do item (b) é $(1,4,-3)$. Seja $P = (x,y,z)$ um ponto do plano que buscamos. A condição de pertencimento de P ao plano consiste em impor que o vetor $(x-6, y+2, z+1)$ seja perpendicular ao vetor $(1,4,-3)$. Assim,

$$0 = (1,4,-3) \cdot (x-6, y+2, z+1) = x - 4y - 3z - 1 ,$$

ou seja, a equação do plano paralelo ao plano $x + 4y - 3z = 0$ que passa pelo ponto $(6,-2,-1)$ é $x + 4y - 3z = 1$.

Questão 3: (2,5 pontos)

Considerando as relações entre derivada direcional e vetor gradiente, responda às seguintes questões.

(a) (1,5 ponto) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 2x^2y + y^2$. A partir da definição de derivada parcial, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$. Em seguida, encontre a direção, no plano xy, de maior inclinação da superfície $z = f(x, y)$ a partir do ponto $(1, 2, 8)$.

(b) (1,0 ponto) Na cartografia, a curva descrita por um rio em um mapa intersecta, ao menos de modo aproximado, perpendicularmente as curvas de nível do relevo. Explique esse fato.

Solução:

(a) A partir da definição de derivada parcial,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,2) - f(1,2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(1+h)^2 + 4 - 8}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{8h + 4h^2}{h} = 8$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,2+h) - f(1,2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(2+h) + (2+h)^2 - 8}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h + h^2}{h} = 6$$

Ou seja, $\nabla f(1, 2) = (8, 6)$ e $\|\nabla f(1, 2)\| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$. Sabemos que, como f é diferenciável, a derivada direcional na direção $\hat{u}$ no ponto (x_0, y_0) e o gradiente de f no ponto (x_0, y_0) se relacionam segundo a igualdade

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \hat{u}\ .$$

Podemos reescrever o produto escalar na forma

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos\theta\ ,$$

onde θ, compreendido entre 0 e π, é o ângulo formado, no plano xy, entre os vetores $\hat{u}$ e $\nabla f(x_0, y_0)$. Assim, no ponto $(1, 2)$, temos $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(1, 2) = 10\cos\theta$. A direção de maior inclinação da superfície $z = f(x, y)$ a partir do ponto $(1, 2, 4/3)$ corresponde à direção de maior valor da derivada direcional no ponto $(1, 2)$, o que ocorre quando $\cos\theta = 1$, ou seja, $\theta = 0$. Assim, $\hat{u}$ tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\nabla f(1, 2)$. Podemos, portanto, escrever

$$\hat{u} = \frac{\nabla f(1,2)}{\|\nabla f(1,2)\|} = \left(\frac{8}{10}, \frac{6}{10}\right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)\ .$$

(b) Por um lado, sabemos que a água escorre, a partir de um dado ponto (x_0, y_0) do mapa, na direção e no sentido de maior declividade do relevo naquele ponto (x_0, y_0), ou seja, na direção e no sentido da menor derivada direcional possível em (x_0, y_0). A partir da igualdade que relaciona a derivada direcional e o vetor gradiente, $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos\theta$, vemos que isso ocorre quando $\cos\theta = -1$, isto é, $\theta = \pi$. Ou seja, a água escorre na direção $\hat{u}$ que forma um ângulo de 180^o com $\nabla f(x_0, y_0)$. Por outro lado, na direção tangente à curva de nível que passa pelo ponto (x_0, y_0), a derivada direcional no ponto é igual a zero, pois nessa direção não há variação do valor de $f(x, y)$. Isso ocorre quando $\cos\theta = 0$, isto é, $\theta = \pi/2$. Ou seja, a água escorre na direção $\hat{u}$ que forma um ângulo de 90^o com $\nabla f(x_0, y_0)$. Concluímos, assim, que a direção que o rio corre a partir de um dado ponto é perpendicular à curva de nível que passa por aquele ponto. (Respostas mais sucintas serão aceitas.)

Questão 4: (2,5 pontos)

Seja $D = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 7/2 \,\}$. Seja a função $f : D \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = x^2y^2 + x^3 - 2x + y^2 \ .$$

(a) (0,5 ponto) Represente o conjunto D no plano xy.

(b) (1,0 ponto) Encontre os máximos e mínimos locais de f no interior de D, se existirem.

(c) (1,0 ponto) Encontre o máximo global e o mínimo global de f.

No verso desta folha, estão representados dois gráficos que podem ser úteis na resolução desta questão. Note que os eixos dos gráficos estão em escalas diferentes, para melhor visualização.

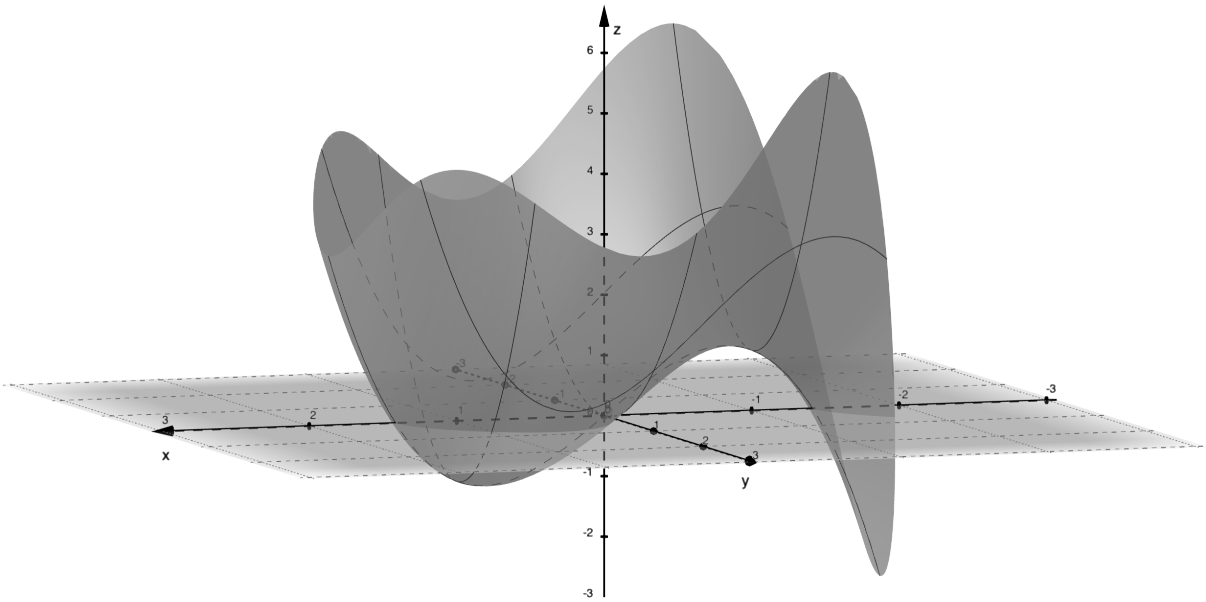


Figura 1: Superfície $z = x^2y^2 + x^3 - 2x + y^2$ com $x^2 + y^2 \leq \frac{7}{2}$.

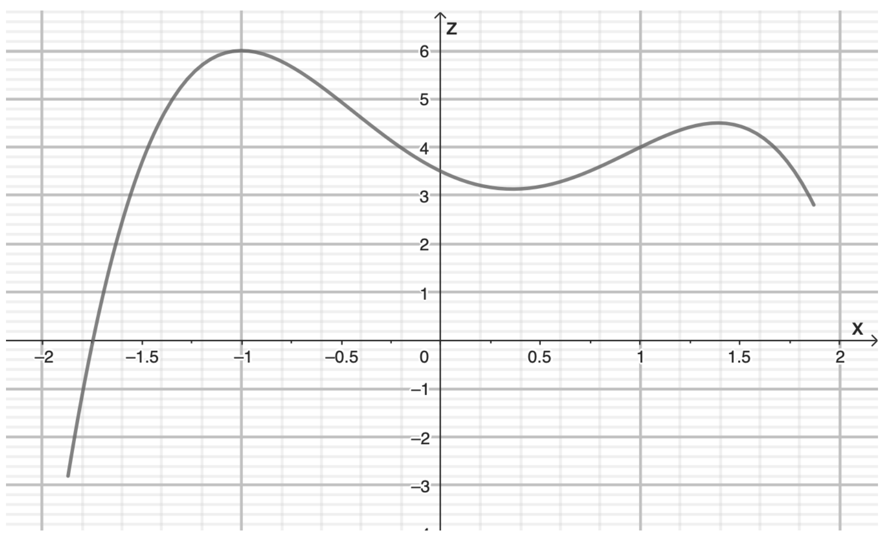
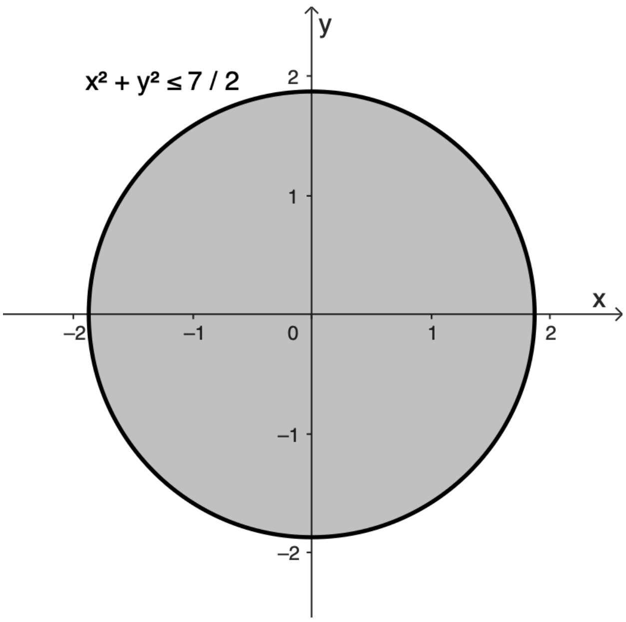


Figura 2: Curva $z = -x^4 + x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{7}{2}$
com $-\sqrt{\frac{7}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{7}{2}}$

Solução:

(a) A distância entre um ponto (x, y) e o ponto $(0, 0)$ é dada por $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Assim, $x^2 + y^2 = r^2$ corresponde aos pontos equidistantes do ponto $(0, 0)$ a uma distância r, ou seja, uma circunferência de raio r. Ou seja, o conjunto D corresponde aos disco fechado de raio $\sqrt{\frac{7}{2}}$ centrado no ponto $(0, 0)$.



(b) Os pontos críticos (x, y) de f satisfazem $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. Calculando as derivadas parciais, obtemos $2xy^2 + 3x^2 - 2 = 0$ e $2yx^2 + 2y = 0$. Da segunda igualdade, segue $y(x^2+1) = 0$, o que só é satisfeito se $y = 0$. Substituindo $y = 0$ na primeira igualdade, obtemos $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Concluímos que os pontos críticos são $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)$ e $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)$. Vamos verificar se f tem um mínimo local ou um máximo local em cada um desses dois pontos. Para isso, utilizamos o teste da segunda derivada. Primeiro, calculamos $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y^2+6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2x^2 + 2$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4xy$. Vamos agora analisar os dois casos separamente.

Caso 1: Seja $(x_0, y_0) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)$. Temos $A = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{10}{3}$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = 0$ e $C = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = 6\sqrt{\frac{2}{3}}$. Ou seja, $A > 0$ e $AC - B^2 = 20\sqrt{\frac{2}{3}} > 0$. Logo, f tem um mínimo local em $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)$. Caso 2: Seja $(x_0, y_0) = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)$. $A = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{10}{3}$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = 0$ e $C = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = -6\sqrt{\frac{2}{3}}$. Ou seja, $A > 0$ e $AC - B^2 = -20\sqrt{\frac{2}{3}} < 0$. Logo, f tem um ponto de sela em $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)$, resultado condizente com a Figura 1.

Concluímos que f tem somente um ponto de mínimo local no interior de D, dado por

$$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right) = 0 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 - 2\sqrt{\frac{2}{3}} + 0 = \left(\frac{2}{3} - 2\right)\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\ ,$$

e nenhum ponto de máximo local no interior de D.

(c) Como D é um conjunto limitado e fechado e f é uma função contínua, f tem máximo e mínimo globais. No gráfico da Figura 1, vemos que esses máximos e mínimos globais ocorrem na fronteira de D. Para encontrá-los, substituímos $y^2 = \frac{7}{2} - x^2$ na expressão $z = f(x, y)$, obtendo

$$z = x^2\left(\frac{7}{2} - x^2\right) + x^3 - 2x + \left(\frac{7}{2} - x^2\right) = -x^4 + x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{7}{2} \ .$$

A partir do gráfico da Figura 2, vemos que o máximo de z na fronteira de D ocorre quando $x = -1$, para o qual $z = 6$. Temos também que o mínimo de z na fronteira de D ocorre quando $x = -\sqrt{\frac{7}{2}}$. Substituindo na expressão acima,

$$z = -\frac{49}{4} - \frac{7}{2}\sqrt{\frac{7}{2}} + \frac{35}{4} + 2\sqrt{\frac{7}{2}} + \frac{14}{4} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{7}{2}} \ .$$

Ou seja, o máximo global de f é 6 e ocorre nos pontos $\left(-1, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ e $\left(-1, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$. O mínimo global de f é $-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}$ e ocorre no ponto $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right)$.