Instituto de Matemática - IM/UFRJ
MAC128 – Cálculo Diferencial e Integral 2 2024.1
Gabarito primeira prova - Turmas da manhã - 15/05/2024

Avisos: **(1)** Celulares desligados **(2)** 2 horas de prova **(3)** Só terão validade as soluções justificadas **(4)** Pontuação máxima: 10 pontos

Questão 1. *(a) (1 pt) Resolva a equação* $y' + \frac{y}{2.000} = 20$, *tal que* $y(0) = 0$.

(b) (0,5 pt) Determine o $\lim_{t\to\infty} y(t)$ *justificando seus passos.*

Solução:
a) Temos que resolver o sistema:

$$y' + \frac{y}{2.000} = 20. \tag{1}$$

Essa é uma EDO linear de primeira ordem e podemos resolver pelo método do fator integrante.

O fator integrante é $\mu(t) = e^{\int \frac{1}{2.000}dt} = e^{\frac{t}{2.000}}$ multiplicando (**??**) por $\mu(t)$ temos :

$$e^{\frac{t}{2.000}}y' + e^{\frac{t}{2.000}}\frac{y}{2.000} = 20\, e^{\frac{t}{2.000}} \Leftrightarrow [e^{\frac{t}{2.000}}.y]' = 20\, e^{\frac{t}{2.000}}$$

e integrando obtemos a solução da equação: $y(t) = 40.000 + C\, e^{\frac{-t}{2.000}}$.

Mas $y(0) = 0 \Rightarrow 40.000 + C = 0 \Rightarrow C = -40.000 \Rightarrow$

$$\boxed{y(t) = 40.000(1 - e^{\frac{-t}{2.000}}).}$$

(b) $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} 40.000(1 - e^{\frac{-t}{2.000}}) = 40.000$, pois $\lim_{t\to\infty} e^{\frac{-t}{2.000}} = 0$.

Questão 2. *(a) (1,5 pt) Determine a solução geral* $x(t)$ *da equação* $2x'' + 8x' + 8x = 4e^{-2t}$.

(b) (1,5 pt) Determine a solução da equação tal que $x(0) = 1$ *e* $x'(0) = 1$.

Solução:
(a) Temos que resolver a equação

$$2x'' + 8x' + 8x = 4e^{-2t}.$$

O homogêneo associado: $2x'' + 8x' + 8x = 0$.
Polinômio caracteristico do homogêneo: $2\lambda^2 + 8\lambda + 8 = 0$, tem raizes duplas: $r_1 = r_2 = -2$.
Portanto, a solução geral do homogêneo é:

$$\boxed{x_H(t) = C_1e^{-2t} + C_2\, t\, e^{-2t}.}$$

Como -2 é raiz dupla, uma solução particular é dada por $x_p(t) = (A\, e^{-2t})\, t^2$. E derivando:

$$\begin{cases} (a) \quad x_p(t) = (A\, e^{-2t})\, t^2 \\ (b) \quad x_p' = -2At^2e^{-2t} + 2Ate^{-2t} \\ (c) \quad x_p'' = 4At^2e^{-2t} \ - 8Ate^{-2t} \ + 2Ae^{-2t}. \end{cases}$$

$$2 \times (c) + 8 \times (b) + 8 \times (a) = 4e^{-2t} \Leftrightarrow 4Ae^{-2t} = 4e^{-2t} \Leftrightarrow A = 1 \Rightarrow x_p(t) = t^2e^{-2t}.$$

Assim, a solução geral é dada por:

$$\boxed{x(t) = x_H(t) + x_p(t) = C_1\, e^{-2t} + C_2\, t\, e^{-2t} + \, t^2\, e^{-2t}.}$$

(b) Observe que

$$x'(t) = -2\, C_1 e^{-2t} + C_2\, e^{-2t} - 2\, C_2\, t\, e^{-2t} + 2\, t\, e^{-2t} - 2\, t^2\, e^{-2t}.$$

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1 \text{ e } C_2 = 3.$$

Portanto a solução tal que $x(0) = 1$ e $x'(0) = 1$ é:

$$\boxed{x(t) = e^{-2t} + 3\, t\, e^{-2t} + \, t^2\, e^{-2t}.}$$

Questão 3. *Considere a curva $\gamma(t)$ com equação paramétrica $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in \mathbb{R}$ abaixo e tal que $\gamma(0) = (1, -1, 0)$*

$$\gamma(t) : \begin{cases} x''(t) + x(t) = 0 \\ y(t) = -x'(t) \\ z'(t) = 4. \end{cases} \tag{2}$$

(a) (1 pt) Encontre fórmulas explícitas para $x(t), y(t)$ e $z(t)$.

(b) (1 pt) Calcule o comprimento da curva para $t \in [0, 4]$.

(c) (1 pt) Dê uma parametrização da reta tangente à curva em $P_0 = (1, -1, 0)$.

Solução:

(a)

1. $x(t) = c_1\, \cos(t) + c_2\, \sin(t)$,
2. $y(t) = -x'(t) = c_1\, \sin(t) - c_2\, \cos(t)$,
3. $z(t) = 4t + b$.

Avaliando em $t = 0$ obtém-se: $c_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad b = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\gamma(t) = (\sin(t) + \cos(t), \sin(t) - \cos(t), 4\, t).}$$

(b) Temos que $\gamma'(t) = (\cos(t) - \sin(t), \cos(t) + \sin(t), 4)$ e portanto

$$\|\gamma'(t)\|^2 = (\cos(t) - \sin(t))^2 + (\cos(t) + \sin(t))^2 + 4^2 = 2\,(\sin(t)^2 + \cos(t)^2) + 16 = 18.$$

Logo,

$$\boxed{\int_0^4 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^4 \sqrt{18} = 4\sqrt{18} \Rightarrow \ \ell(\gamma) = 4\sqrt{18}.}$$

(c) Observe que $\gamma'(t) = (\cos(t) - \sin(t), \cos(t) + \sin(t), 4) \Rightarrow \gamma'(0) = (1, 1, 4)$ e portanto

$$L(t) = \gamma(0) + t\, \gamma'(0) = (1, 1, 0) + t\, (1, 1, 4) = (1 + t, 1 + t, 4\, t).$$

Questão 4. *(a) (1 pt) Encontre a equação do plano* Π_0 *com vetor normal* $\overrightarrow{n} = (2,3,4)$ *que passa por* $P_0 = (2,4,-1)$.

(b) (0,5 pt) Encontre o ângulo entre o plano Π_0 *encontrado em (a) e o plano* Π_1 *com equação* $x+y+z = 1$.

(d) (1 pt) Dê a equação paramétrica da reta L *de interseção desses dois planos.*

Solução:

(a) $2x+3y+4z+d = 0, P_0 \in \Pi_0 \Rightarrow d = -12$ e segue que a equação de Π_0 é $2x+3y+4z-12 = 0$.

(b) $\overrightarrow{n}_0 = (2,3,4)$ e $\overrightarrow{n}_1 = (1,1,1)$. Portanto, $\angle(\Pi_0, \Pi_1) = \angle(\overrightarrow{n}_0, \overrightarrow{n}_1)$. Seja θ este ângulo. Então

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{n}_0 \cdot \overrightarrow{n}_1}{\|\overrightarrow{n}_0\|.\|\overrightarrow{n}_1\|} = \frac{9}{\sqrt{87}} \Rightarrow \theta = \arccos(\frac{9}{\sqrt{87}}).}$$

(d) Para obter a equação da reta, vamos determinar um de seus pontos e o vetor diretor $\overrightarrow{V}$. Mas $L \subset \Pi_0 \cap \Pi_1 \Rightarrow \overrightarrow{V}$ é ortogonal aos vetores normais n_0 e n_1 de Π_0 e Π_1 respectivamente. Assim,

$$\boxed{\overrightarrow{V} = \overrightarrow{n_0} \times \overrightarrow{n_1} = (-1,2,-1).}$$

Agora seja $A(x,y,z)$ um ponto qualquer de L. Podemos tomar $A = (0,y,z)$.

Mas $A \in L \Rightarrow A \in \Pi_0 \cap \Pi_1$ e portanto suas coordenadas devem satisfazer o sistema:

$$(*) \quad \begin{cases} 2x+3y+4z-12 = 0 \\ x+y+z = 1. \end{cases}$$

e substituindo as coordenadas de Aem $(*)$ obtemos: $\begin{cases} y = -8 \\ z = 9. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = (0,-8,9).$

Assim, a equação paramétrica da reta L é: $(0,-8,9) + t(-1,2,-1) \Leftrightarrow$

$$\boxed{\begin{cases} x = -t \\ y = -8+2t \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = 9-t, \end{cases}}$$

Boa sorte!