Univerdidade Federal de Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Departamento de Matemática

Gabarito da Prova Final Unificada de Cálculo I- 2015/2, 08/03/2016

1. Considere a função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} ln(ax^2), & se\ x \geq 1, \\ \dfrac{\frac{6\ln 2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-x^3}, & se\ 0 < x < 1. \end{cases}$$

a. Encontre o valor de a para que f seja contínua.

Solução
Verificamos que f é contínua no intervalo $(0,1)$ porque é o quociente de duas funções contínuas e é contínua no intervalo $(1,\infty)$ pois é a composição de duas funções contínuas, logaritmo e polinômio.
Para que f seja contínua no ponto $x = 1$ devemos ter:

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1-} f(x) = f(1).$$

Assim,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{6\ ln\ 2\ cos(\frac{\pi x}{2})}{\pi(1-x^3)} = \frac{6\ ln\ 2}{\pi} \lim_{x\to 1^-} \frac{cos(\frac{\pi x}{2})}{(1-x^3)} = \frac{0}{0},$$
uma indeterminação, logo usaremos a regra de L'Hôspital.

$$\frac{6\ ln\ 2}{\pi} \lim_{x\to 1^-} \frac{-sin(\frac{\pi x}{2})\frac{\pi}{2}}{(-3x^2)} = \frac{6\ ln\ 2}{\pi} \cdot \frac{-\pi}{2(-3)} = ln\ 2.$$

Logo $\lim_{x\to 1^-} f(x) = ln\ 2$.
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} ln(ax^2) = ln(a)$, pois $ln(ax^2)$ é contínua em $[1,\infty)$.
Devemos ter $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = ln\ 2$ para que f seja contínua. Sendo assim, $a = 2$.

b. Encontre a reta tangente a f no ponto $(e, ln(a \cdot e^2))$.

Solução
A reta tangente a f deve assumir a forma $r(t) = f'(e)t + b$ e satisfazer a seguinte igualdade: $ln(a \cdot e^2) = f'(e) \cdot e + b$. Calculando a derivada de f verificamos que $f'(x) = \dfrac{2ax}{ax^2} = \dfrac{2}{x}$.
Para verificar o valor de b resolvemos $ln(a \cdot e^2) = f'(e) \cdot e + b$.
$ln(a \cdot e^2) - \dfrac{2}{e} \cdot e = b \iff ln(2 \cdot e^2) - 2 = b \iff ln(2) + ln(e^2) - 2 = b \iff ln(2) + 2 - 2 = b$
$\iff ln(2) = b$.
Logo a reta tangente a f no ponto $(e, ln(a \cdot e^2))$ é dada por $r(t) = \dfrac{2}{e} \cdot t + ln\ 2$.

2. Se um retângulo tiver sua base em um eixo x e dois vértices sobre a curva $y = e^{-x^2}$. Mostre que o retângulo tem maior área possível quando os vértices estão nos pontos de inflexão da curva.

Solução
Como se mostra na figura abaixo, a área do retângulo é dada por $A(x) = 2xe^{-x^2}$ definida para $x \geq 0$. Para encontrar os pontos de máximo de A, primeiro encontremos seus pontos críticos.

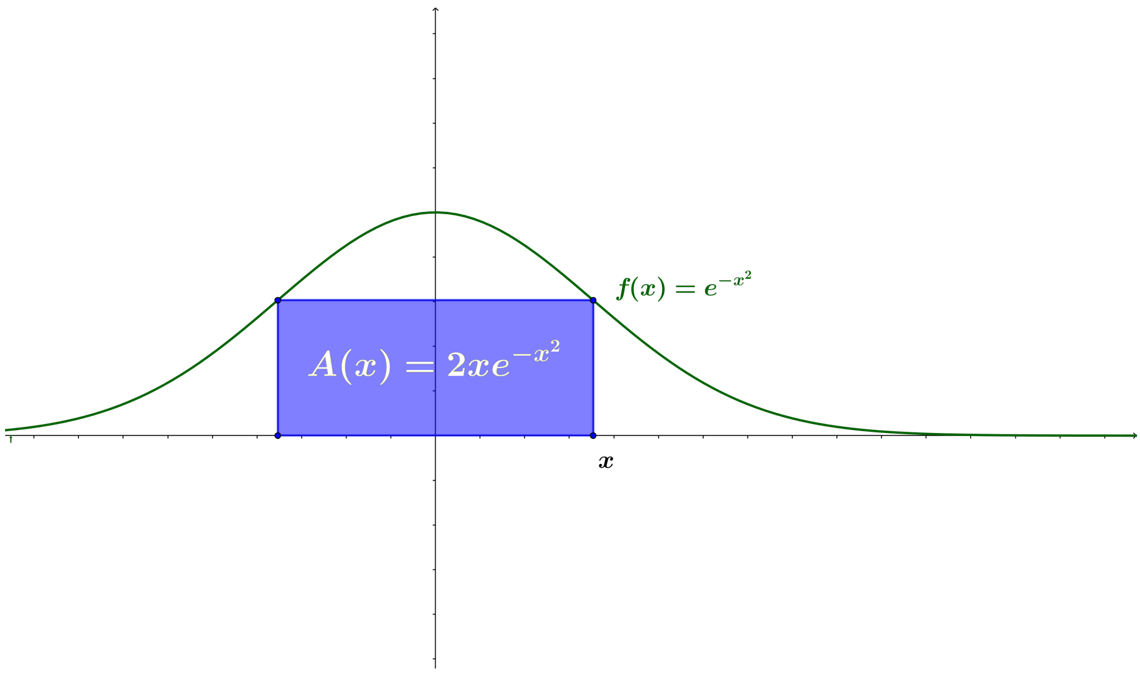
$$A'(x) = 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2} = (2-4x^2)e^{-x^2} = (\sqrt{2}-2x)(\sqrt{2}+2x)e^{-x^2}. \qquad (1)$$

Logo $A'(x) = 0 \iff 2e^{-x^2} = 4x^2e^{-x^2} \iff 2 = 4x^2 \iff \dfrac{1}{2} = x^2 \iff x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pois o domínio de A é $\{x : x \geq 0\}$.

Assim pela equação (1) e o critério da primeira derivada vemos que $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ é um ponto de máximo global de A (pois $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ é o único ponto crítico de A).

Logo o retângulo como maior área tem os pontos $(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$ e $(\frac{-\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$ como vértices.

Agora vamos encontrar os pontos de inflexão de f, para isso calculemos $f''(x)$.
$f''(x) = (4x^2-2)e^{-x^2} = (2x-\sqrt{2})(2x+\sqrt{2})e^{-x^2} \implies f''(x) > 0$ em $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ and $f''(x) < 0$ em $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Isso mostra que os pontos de inflexão da curva $y = e^{-x^2}$ são $(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$ e $(\frac{-\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$ que são os vértices sobre a curva $y = e^{-x^2}$ do retângulo que tem maior área.



3. (2,0) Considere a função f dada por $f(x) = (x+2) - \ln(x+2)^2$.

   a. Encontre, caso existam, as assíntotas verticais de f.

   Solução
   Como $\lim\limits_{x \to -2^{\pm}} f(x) = +\infty$, então existe uma assíntota vertical em $x = -2$.

b. Determine os pontos críticos de f, intervalos onde a função é crescente e onde a função é decrescente.

Solução
Observemos $f'(x) = \dfrac{x}{x+2}$, então $x = 0$ é o único ponto crítico de f e analisando o sinal de $f'(x)$ vemos que $f' > 0$ para $x \in A = (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ e $f' < 0$ para $x \in B = (-2, 0)$. Donde concluímos que f é crescente em A e decrescente em B.

c. Encontre os extremos relativos e absolutos de f, caso existam.

Solução
Pelo item b) e o critério da primeira derivada vemos que $x = 0$ é um ponto de mínimo local. Além disso, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ and

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (x+2)\left(1 - \frac{2\ln(x+2)}{x+2}\right) = +\infty,$$

pois por L'Hôspital $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2\ln(x+2)}{x+2} = 0$. Logo, f não tem extremos absolutos.

d. Mostre que f é côncava para cima.

Solução
A segunda derivada $f''(x) = \dfrac{2}{(x+2)^2}$ é positiva para todo $x \neq -2$, logo a função f é côncava para cima no seu domínio.

e. Esboce o gráfico da função f.

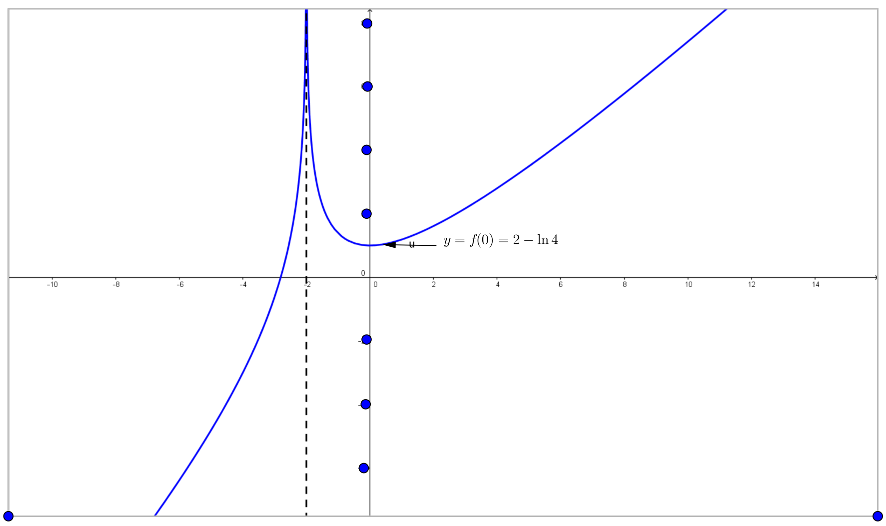


Figura 1: Figura 2

4. Calcule as seguintes integrais:

a. $\displaystyle\int \cos(x) \ln(sen(x))\, dx$;

Solução

Usando integração por partes,

$$\boxed{u = ln(sen\ x),\ du = \frac{\cos x}{sen\, x}dx,\ dv = \cos\ x,\ v = sen\, x\ dx}$$

$$I = \int \cos(x)\ln(sen(x))\,dx = sen(x)\cdot\ln(sen(x)) - \int\ sen\, x\cdot\left(\frac{cos\, x}{sen\, x}\right)\,dx$$

$$= sen(x)\cdot\ln(sen(x)) - \int \cos\ x\,dx = sen(x)\cdot\ln(sen(x)) - sen\,x + C,\ C\in\mathbb{R}.$$

$$I = sen\,x\,(\ln(sen\,x) - 1) + C.$$

b. $\displaystyle\int \frac{1}{sen(x)-1}\,dx.$

Solução

$$\int \frac{1}{sen(x)-1}\,dx = \int \frac{sen(x)+1}{sen^2(x)-1}\,dx = \int -\frac{sen(x)+1}{cos^2(x)}\,dx$$

$$= -\int \frac{sen(x)}{cos^2(x)}\,dx - \int \frac{1}{cos^2(x)}\,dx = -\int tan(x)\ sec(x)\,dx - \int sec^2(x)\,dx$$

$$= -sec(x) - tan(x) + C,\ C\in\mathbb{R}.$$

5. (2,0 pontos)
   Seja $\mathcal{R}$ a região limitada pelas curvas $f(x) = 2 - x^2$ e $g(x) = 1$.

   a. (0,8) Esboce a região $\mathcal{R}$.

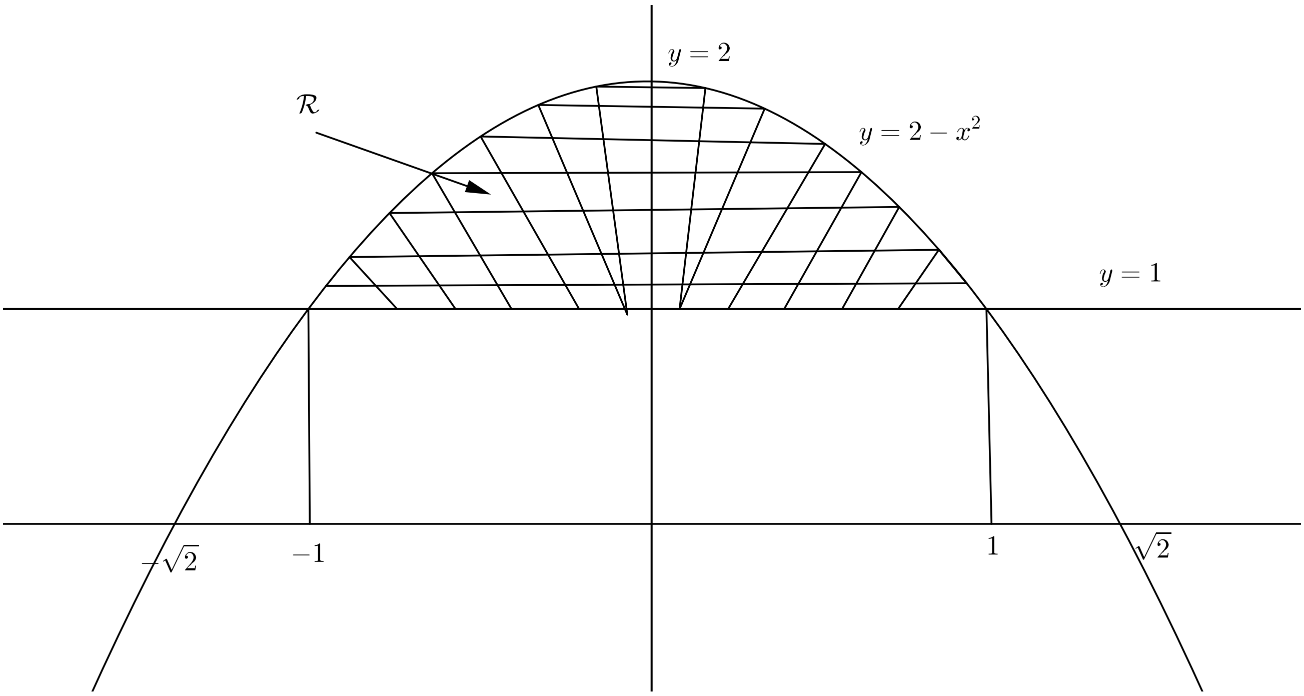


Figura 2: Figura 3

   b. (1,2) Encontre o volume do sólido de revolução gerado quando $\mathcal{R}$ é girado ao redor da reta $y = 1$.

Solução

Fazendo $f(x) = g(x)$ vemos que os dois gráficos interceptam quando $x = \pm 1$.
Para encontra o raio, subtraímos $g(x)$ de $f(x)$.
$R(x) = f(x) - g(x) = (2 - x^2) - 1 = 1 - x^2$
Integramos entre -1 e 1 para encontra o volume.

$$V = \pi \int_{-1}^{1} [R(x)]^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 dx =$$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left(1 - 2x^2 + x^4\right) dx = \pi \left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{15}\pi.$$