Questão 1: (2.0 pontos)

(a) Calcule:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^2}\operatorname{tg} x}{\mathrm{e}^x\, x}.$$

(b) Determine se a seguinte integral imprópria é finita:

$$\int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x.$$

Solução:

(a) $\dfrac{e^{x^2}\operatorname{tg} x}{e^x x} = \dfrac{e^{x^2}}{e^x\cos x}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}\operatorname{tg} x}{e^x x} = \left(\dfrac{e^{0^2}}{e^0\cos 0}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1$

(b) Substituindo $u = \ln x$ e $du = \dfrac{1}{x}dx$, temos

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C.$$

Assim,

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_e^b \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{b\to\infty} \ln|\ln b| - \underbrace{\ln|\ln e|}_{=0}.$$

A integral imprópria em questão é infinita, pois $\ln|\ln b|$ cresce indefinidamente com b.

Questão 2: (2.0 pontos)

Calcule a área da região

$$R = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x}{\sqrt{4-x}} \le y \le x\,\mathrm{e}^{2x},\ x\in[1,2]\right\}.$$

Solução:

$$A = \int_1^2 \left(xe^{2x} - \frac{x}{\sqrt{4-x}}\right)dx = \int_1^2 xe^{2x}dx - \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{4-x}}dx$$

Integrando por partes, temos que

$$\begin{aligned}
\int_1^2 xe^{2x}dx &= -\int_1^2 1\frac{e^{2x}}{2}dx + \left(x\frac{e^{2x}}{2}\right)\Bigg|_1^2 \\
&= -\left(\frac{e^{2x}}{4}\right)\Bigg|_1^2 + e^4 - \frac{e^2}{2} \\
&= \frac{3e^4 - e^2}{4}.
\end{aligned}$$

Substituindo $u = 4 - x$ e $du = -dx$, temos que $x = 4 - u$ e portanto

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{4-x}}dx &= -\int \frac{4-u}{\sqrt{u}}du = -4\int \frac{1}{\sqrt{u}}du + \int \sqrt{u}du \\
&= -4\left(2\sqrt{u}\right) + \frac{2}{3}\sqrt{u^3} + C = \frac{2(u-12)}{3}\sqrt{u} + C \\
&= -\frac{2(x+8)}{3}\sqrt{4-x} + C
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{4-x}}dx = \left(-\frac{2(x+8)}{3}\sqrt{4-x}\right)\Bigg|_1^2 = 6\sqrt{3} - \frac{20\sqrt{2}}{3}.$$

e, portanto,

$$A = \frac{3e^4 - e^2}{4} + \frac{20\sqrt{2}}{3} - 6\sqrt{3}.$$

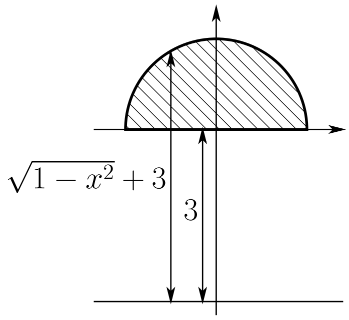
Questão 3: (2.0 pontos)

Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do semi-círculo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$$

em torno da reta $y = -3$.

Solução:



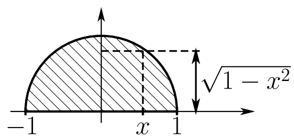
Integrando "fatias" ortogonais ao eixo de rotação, obtemos

$$V = \int_{-1}^{1} \pi \left(\left(\sqrt{1-x^2} + 3 \right)^2 - 9 \right) dx = \pi \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2 \right) dx + 6\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx.$$

Calculamos primeiro

$$\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2 \right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

A integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$ pode ser reconhecida como a área do semi-círculo de raio 1 (ver figura abaixo), portanto igual a $\frac{\pi}{2}$.



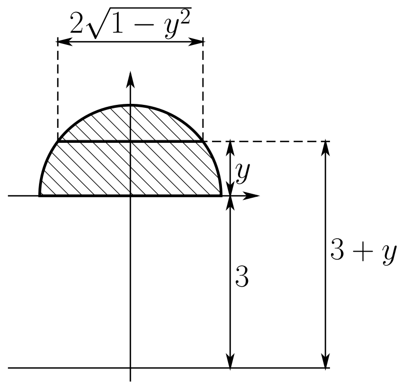
Outra opção é calculá-la diretamente, através da substituição trigonométrica $\operatorname{sen}\theta = x$, que implica em $dx = \cos\theta d\theta$. Neste caso,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta} \cos\theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta = \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Assim,

$$V = \frac{4\pi}{3} + 3\pi^2.$$

Outra opção ainda é calcular o volume "fatiando" o sólido por cascas cilíndricas, como indicado na figura abaixo:

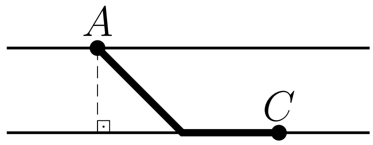


Temos então

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 2\pi(3+y)\left(2\sqrt{1-y^2}\right)dy \\
&= 12\pi \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1-y^2}dy}_{\substack{1/4 \text{ da área} \\ \text{do círculo unitário}}} + 4\pi \underbrace{\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}dy}_{\substack{\text{substituição:} \\ u=1-y^2}} \\
&= 12\pi\frac{\pi}{4} + 4\pi\left(-\frac{1}{3}\sqrt{(1-y^2)^3}\right)\Big|_0^1 \\
&= 3\pi^2 + \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Questão 4: (2.0 pontos)

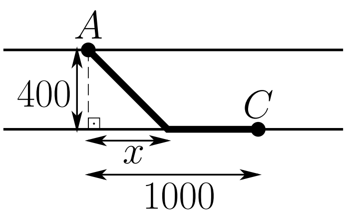
Um rio tem 400 m de largura. Deseja-se estender um cabo de comunicação ligando os pontos A e C, situados em margens opostas. O ponto C está 1 km a jusante (isto é, rio abaixo) do ponto A, conforme a figura.



O custo de instalação do cabo é de R$ 130,00 por metro no leito do rio e de R$ 50,00 por metro no solo seco. Determine quantos metros de cabo deverão ser instalados no rio e quantos em terra para que o custo total seja mínimo.

Solução:

Seja $0 \leq x \leq 1000$ a distância (em metros) indicada na figura.



O custo total em reais é dado pela seguinte função de x:

$$c(x) = 130\sqrt{400^2 + x^2} + 50(1000 - x).$$

Para identificar os intervalos de crescimento/decrescimento de c, analisamos o sinal da derivada:

$$\begin{aligned} c'(x) = \frac{130x}{\sqrt{400^2 + x^2}} - 50 = 0 \quad &\Rightarrow \quad 13x = 5\sqrt{400^2 + x^2} \\ &\Rightarrow \quad 169x^2 = 25(400^2 + x^2) \\ &\Rightarrow \quad x = \pm\frac{500}{3} \end{aligned}$$

No intervalo $[0, 1000]$, a derivada se anula apenas em $x_* = 500/3$. Para verificar o sinal de c' antes e depois de x_*, calculamos

$$\begin{aligned} c'(0) &= -50 < 0 \text{ e} \\ c'(1000) &= \frac{130000}{\sqrt{400^2 + 1000^2}} - 50 = \frac{1300}{\sqrt{116}} - 50 > \frac{1100}{\sqrt{121}} - 50 = 50 > 0. \end{aligned}$$

Como a função decresce em $[0, x^*]$ e cresce em $[x^*, 1000]$, podemos concluir que x^* é ponto de mínimo absoluto no intervalo de interesse $[0, 1000]$.

O custo mínimo se dá para $x^* = 500/3$, o que corresponda a $\sqrt{400^2 + (500/3)^2} = 1300/3$ metros de cabo submerso e $2500/3$ metros de cabo em solo.

Questão 5: (2.0 pontos)
Considere a função $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$.

(a) Determine:
  (i) os limites de $p(x)$ quando x tende a $-\infty$ e quando x tende a ∞;
  (ii) os intervalos onde p é crescente e aqueles onde é decrescente;
  (iii) os pontos de máximo e mínimo locais e/ou globais (abscissas e ordenadas);
  (iv) os intervalos onde a concavidade é para cima (função é convexa) e aqueles onde é para baixo (função é côncava);
  (v) os pontos de inflexão de p.

(b) Esboce o gráfico de p, respeitando todos os aspectos do gráfico identificados no item (a).

Solução:

(a) (i)

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$$

(ii) É necessário estudar o sinal de $p'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$. Observa-se que: $p'(x) = 0$ em -1 e 2; $p'(x) < 0$ em $(-1, 2)$ e $p'(x) > 0$ para $x < -1$ e $x > 2$. Assim, p é crescente nos intervalos $(-\infty, -1]$ e $[2, \infty)$ e é decrescente no intervalo $[-1, 2]$.

(iii) Como (pelo item i) a função não é limitada nem por cima nem por baixo, não há extremos absolutos. Como o domínio é a reta inteira, os extremos locais ocorrem em pontos críticos. Como a derivada existe sempre, eles ocorrem em pontos onde a derivada se anula: -1 e 2. Analisando-se o sinal da derivada, conclui-se que -1 é ponto de máximo local e que 2 é ponto de mínimo local. Os respectivos valores da função são $f(-1) = 7$ e $f(2) = -20$.

(iv)

$$p''(x) = 12x - 6 = 12(x - 1/2)$$

Assim, a função é côncava (concavidade para baixo) em $(-\infty, 1/2]$ e é convexa (concavidade para cima) em $[1/2, \infty)$.

(v) Há um ponto de inflexão em $(1/2, p(1/2)) = (1/2, -13/2)$.

(b)