Universidade Federal do Rio de Janeiro
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Prova Final Unificada de Cálculo 1 - 2013/2

Engenharia e Engenharia Química
05/12/2013

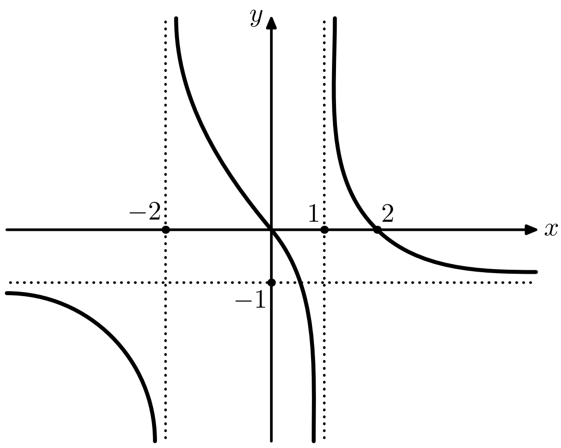
JUSTIFIQUE SUAS RESPOSTAS

1ª Questão: (2,0 pts) Considere uma função $f : \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

(a) $f'(x) < 0$, para todo x no domínio da função;
(b) $f(0) = f(2) = 0$;
(c) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -1$;
(d) $f''(x) < 0$ para $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1)$ e $f''(x) > 0$ para $x \in (-2, 0) \cup (1, +\infty)$;
(e) $\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = +\infty$;
(f) $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.

Faça um esboço do gráfico dessa função.

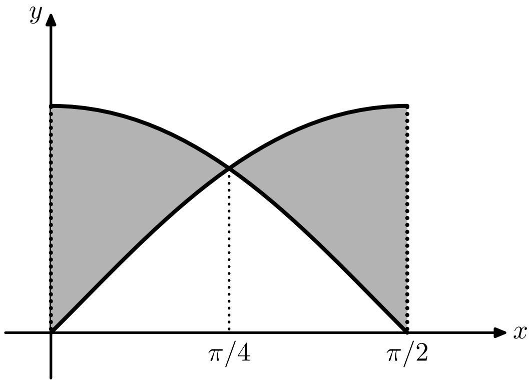
Solução:



2ª Questão: (1,5 pts) Faça um esboço da região R do plano xy limitada pelas curvas $y = \text{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$ e pelas retas $x = 0$ e $x = \pi/2$. Expresse as grandezas abaixo utilizando integrais. **Não é preciso calcular as integrais.**

(a) A área de R;
(b) O volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo x.

Solução:



A área A e o o volume V são dados respectivamente por:

$$A = \int_0^{\pi/2} |\cos(x) - \operatorname{sen}(x)| \, dx$$
$$V = \int_0^{\pi/4} \pi\big(\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)\big) \, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \pi\big(\operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x)\big) \, dx.$$

Obs: Para calcular as integrais acima, temos de proceder como segue:

$$A = \int_0^{\pi/4} \big(\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\big) \, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \big(\operatorname{sen}(x) - \cos(x)\big) \, dx.$$

Como

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2},$$

temos

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} \cos(2x) \, dx - \pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(2x) \, dx = 2\pi \int_0^{\pi/4} \cos(2x) \, dx.$$

3ª Questão: (2,5 pts) Calcule:

(a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(2e^x - 1)}$, (b) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$, (c) $\displaystyle \int_4^5 \frac{5x - 13}{x^2 - 5x + 6} \, dx$, (d) $\displaystyle \int \operatorname{sen}(\ln(x)) \, dx$,

(e) $f'(x)$ onde $f(x) = \exp\big(\sqrt[3]{x} + \operatorname{sen}(x^2)\big)$ (Obs.: $\exp(u) = e^u$).

Solução: (a) Como a indeterminação neste caso é da forma "0/0", aplicando a Regra de L'Hôpital, temos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{\ln(2e^x - 1)} = \lim_{x \to 0} \left[\sec^2(x) \left(\frac{2e^x - 1}{2e^x}\right)\right] = \lim_{x \to 0} \sec^2(x) \lim_{x \to 0} \left(\frac{2e^x - 1}{2e^x}\right) = \frac{1}{2}.$$

(b) Embora a indeterminação neste caso seja da forma "∞/∞", a Regra de L'Hôpital não se aplica, como se pode observar claramente. Por outro lado, é claro que

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}, \quad \forall x \neq 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=1.$$

(c) As razes da equação $x^2-5x+6=0$ são $x=3$ e $x=2$. Logo, podemos decompor a função racional em frações parciais:

$$\frac{5x-13}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}=\frac{(A+B)x-(2A+3B)}{x^2-5x+6}.$$

A identidade se verifica se, e somente se, A e B satisfazem o sistema

$$A+B=5$$

$$2A+3B=13$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos $A=2$ e $B=3$. Logo,

$$\int_4^5\frac{5x-13}{x^2-5x+6}\,dx=2\int_4^5\frac{dx}{x-3}+3\int_4^5\frac{dx}{x-2}=\ln\left|(x-3)^2(x-2)^3\right|_4^5=\ln\left(\frac{27}{2}\right).$$

(d) Considerando a substituição $u=\ln(x)$, temos

$$du=\frac{1}{x}dx\quad\Longleftrightarrow\quad dx=xdu=e^u du.$$

Logo,

$$\int\operatorname{sen}\big(\ln(x)\big)\,dx=\int\operatorname{sen}(u)e^u\,du.$$

Integrando por partes duas vezes, obtemos:

$$\int\operatorname{sen}(u)e^u\,du=\operatorname{sen}(u)e^u-\int\cos(u)e^u\,du=\operatorname{sen}(u)e^u-\left[\cos(u)e^u+\int\operatorname{sen}(u)e^u\,du\right].$$

isto é,

$$2\int\operatorname{sen}(u)e^u\,du=\big[\operatorname{sen}(u)-\cos(u)\big]e^u+C.$$

Portanto,

$$\int\operatorname{sen}\big(\ln(x)\big)\,dx=\frac{x}{2}\big[\operatorname{sen}(\ln(x))-\cos(\ln(x))\big]+C.$$

(e) Denotando $u(x)=\sqrt[3]{x}+\operatorname{sen}(x^2)$, temos pela regra da cadeia, $f'(x)=e^{u(x)}u'(x)$, onde

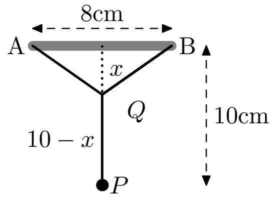
$$u'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}+2x\cos(x^2).$$

Logo,

$$f'(x)=\exp\left(\sqrt[3]{x}+\operatorname{sen}(x^2)\right)\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}+2x\cos(x^2)\right).$$

4ª Questão: (2,0 pts)

Um peso P deve ser mantido suspenso a 10 cm de uma barra horizontal de extremidades A e B, por um fio na forma de Y (veja figura). Sabendo que o segmento mede 8 cm, qual o fio de menor comprimento que pode ser usado?



Solução: Seja x a distância do ponto Q ao ponto médio da barra. Então o comprimento da corda mede:

$$L(x) = 10 - x + 2\sqrt{16 + x^2}, \quad x \in [0, 10].$$

Calculando a derivada de $L(x)$, obtemos:

$$L'(x) = -1 + \frac{2x}{\sqrt{16 + x^2}}, \quad L'(x) = 0 \iff \sqrt{16 + x^2} = 2x.$$

Portanto, $x = 4\sqrt{3}/3$ é ponto crítico de L. Observe que

$$L''(x) = \frac{32}{(16 + x^2)^{3/2}} > 0, \quad \forall x \in (0, 10).$$

Logo, L é função estritamente convexa e, consequentemente, $x = 4\sqrt{3}/3 \in (0, 10)$ é o único ponto de mínimo global de L. Assim, o comprimento mínimo é

$$L(4\sqrt{3}/3) = 10 - \frac{12\sqrt{3}}{3}.$$

5ª Questão: (2,0 pts) Considere a função

$$y = f(x) = \int_0^{\operatorname{sen}(x/2)} e^{t^2}\, dt.$$

Ache a equação da reta r que é tangente ao gráfico de f no ponto $(2\pi, 0)$. Em seguida ache as coordenadas do ponto de interseção da reta r com a reta s dada por:

$$y = \frac{3}{2}x + \pi.$$

Solução: Definindo

$$F(u) = \int_0^u e^{t^2}\, dt,$$

segue do Teorema Fundamental do Cálculo, $F'(u) = e^{u^2}$. Como $f(x) = F\big(\operatorname{sen}(x/2)\big)$, segue da regra da cadeia:

$$f'(x) = F'\left(\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{\operatorname{sen}^2(x/2)}\cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad f'(2\pi) = -\frac{1}{2}.$$

A equação da reta r tangente ao gráfico de f no ponto $(2\pi, 0)$ é:

$$y = f'(2\pi)(x - 2\pi) = -\frac{1}{2}(x - 2\pi) = -\frac{x}{2} + \pi.$$

Se $P = (a, b)$ é o ponto onde as retas r e s se cruzam, então

$$b = \frac{3}{2}a + \pi = -\frac{1}{2}a + \pi \quad \Rightarrow \quad a = 0, \quad b = \pi.$$

Portanto, $P = (0, \pi)$.