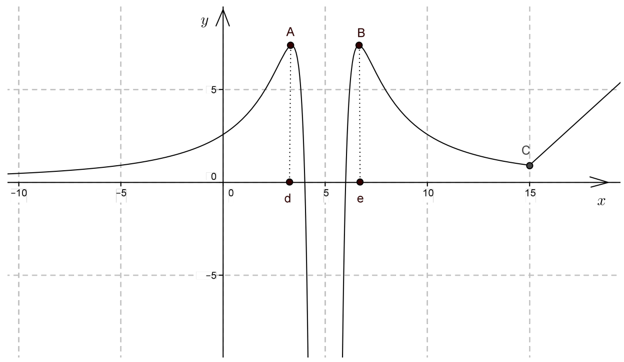
Questão 1: (2 pontos)
Considere a função $y = f(x)$ cujo gráfico é dado na figura abaixo.



Com a ajuda da figura, responda às seguintes perguntas:

(i) Quais são as assíntotas horizontais e verticais ao gráfico da função f?

(ii) Identifique os intervalos onde a derivada da função f é positiva e os intervalos onde a derivada da função f é negativa.

(iii) Quais são os pontos críticos de f? A função f admite máximos ou mínimos locais nesses pontos?

(iv) A função f é derivável em $x = e$? Caso seja, quanto vale $f'(e)$? A função f é derivável em $x = 15$? Caso seja, quanto vale $f'(15)$?

Solução:

(i) Observamos na figura que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, portanto a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função f. Também, observamos que $\lim_{x\to 5} f(x) = -\infty$ e assim a reta $x = 5$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função f.

(ii) A derivada da função f é positiva nos intervalos onde a função f é crescente, ou seja em $(-\infty, d)$, $(5, e)$ e $(15, +\infty)$. A derivada da função f é negativa nos intervalos onde a função f é decrescente, ou seja em $(d, 5)$ e $(e, 15)$.

(iii) Por definição, os pontos críticos da função f são os pontos c no domínio de f tais que f não é derivável em c ou $f'(c) = 0$. Portanto, aqui os pontos críticos de f são d, e e 15. Além disso, observamos que f admite máximos locais em $x = d$ e $x = e$ e um mínmo local em $x = 15$.

(iv) A função f é derivável em $x = e$. Como ela admite um mínimo local em $x = e$, vale $f'(e) = 0$. Por outro lado, a função f não é derivável em $x = 15$, já que $\lim_{x\to 15-} f'(x) \neq \lim_{x\to 15+} f'(x)$.

Questão 2: (2 pontos)
Determine a equação da reta r passando por $(0, 0)$, tal que a área da região limitada por r e pela curva $y = x^3 - x$, com $x > 0$, seja igual a 4.

Solução:

Como a reta r passa pela origem, será da forma $y = m\,x$ para algum $m \in \mathbb{R}$. Calculemos as interseções da reta com a curva $y = x^3 - x$.

$$m\,x = x^3 - x \iff x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{m+1}.$$

Assim, a região desejada está entre $x = 0$ e (por ser $x > 0$) $x = \sqrt{m+1}$. Concluímos também que deve ter-se $m \geq -1$, pois caso contrário a reta $y = m\,x$ apenas interseta a curva em $x = 0$, não definindo assim uma região limitada. Para x entre 0 e $\sqrt{m+1}$, o gráfico de $y = x^3 - x$ está sempre abaixo do gráfico da reta $y = mx$. Temos então

$$4 = \int_0^{\sqrt{m+1}} \Big(mx - (x^3 - x)\Big)\,dx = \left[m\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{m+1}} = \frac{(m+1)^2}{2} - \frac{(m+1)^2}{4} = \frac{(m+1)^2}{4}.$$

Portanto, deve ter-se $(m+1)^2 = 16$, ou (como $m \geq -1$), $m + 1 = 4$. Portanto, $m = 3$ e a reta pretendida é $y = 3x$.

Questão 3: (2 pontos)
Calcule as integrais abaixo.

(**i**) $\displaystyle\int \frac{e^t}{\sqrt{1 - e^{2t}}}\,dt\,.$ (**ii**) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{sen} x\,dx\,.$

Solução:

(**i**) Fazemos a substituição $u = e^t \;\Rightarrow\; du = e^t dt$. Portanto, vale

$$\int \frac{e^t}{\sqrt{1 - e^{2t}}}\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\,du = \operatorname{arcsen} u + C = \operatorname{arcsen}\left(e^t\right) + C\,.$$

(**ii**) Seja $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{sen} x\,dx$. Calculamos integrando por partes duas vezes que

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\,d(-\cos x) = -e^x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\,x\,d(e^x) = 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\,d(\operatorname{sen} x) \\ &= 1 + e^x \operatorname{sen} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,d(e^x) = 1 + e^{\frac{\pi}{2}} - I\,. \end{aligned}$$

Portanto, conluímos que $I = \frac{1}{2}\Big(1 + e^{\frac{\pi}{2}}\Big)$.

Questão 4: (2 pontos)
Calcule os seguintes limites:

(**i**) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt{x\,\operatorname{cotg} x}.$ (**ii**) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left[\ln x + \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right].$

Solução:

(**i**) Usamos o limite fundamental $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e o fato que a função : $x \mapsto \sqrt{x}$ é uma função contínua para calcular

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x \operatorname{cotg} x} = \sqrt{\lim_{x\to 0} \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x}} = \sqrt{1}\,.$$

(**ii**) Usamos a mudança de variável $y = \frac{1}{x}$, o fato que a função ln é contínua e o limite fundamental $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$ para calcular

$$\lim_{x\to +\infty} \left[\ln x + \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] = \lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{\operatorname{tg}(1/x)}{1/x}\right) = \lim_{y\to 0+} \ln\left(\frac{\operatorname{tg} y}{y}\right) = \ln\left(\lim_{y\to 0+} \frac{\operatorname{sen} y}{y \cos y}\right) = 0\,.$$

Questão 5: (2 pontos)

Os lados de um retângulo encolhem de forma tal que a área do mesmo decresce a uma taxa constante de $24\,cm^2/s$. Sabendo-se que, em qualquer instante, a base do retângulo x decresce três vezes mais rápido que sua altura y, calcule a taxa de variação da altura no instante em que $x = y = 2\,cm$.

Solução:

Seja A a área do rectângulo. Então $A = xy$. Derivamos essa relação com respeito ao tempo e deduzimos que

$$-24 = A' = x'y + xy'\,. \tag{1}$$

Por outro lado, como a base do retângulo x decresce três vezes mais rápido que sua altura y, temos que $x' = 3y'$, o que implica combinado com (1) que $-24 = y'(3y + x)$. Portanto, no instante em que $x = y = 2\,cm$, obtemos que $y' = -3cm/s$.

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

Duração da prova: duas horas e meia