UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Matemática
PROVA FINAL UNIFICADA – CÁLCULO I
POLITÉCNICA E ENGENHARIA QUÍMICA 28/02/2013.

GABARITO

1ª Questão. (*2.0 pontos*).

Calcule:

a) $f'(x)$ se $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + e^x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\operatorname{sen} x} \int_0^{\operatorname{sen} x} e^{t^2} dt$

c) $\displaystyle\int 2x\sqrt{1+x^2}\; dx$

- **Solução.**

a) Seja $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + e^x}} = \Big(x + (x+e^x)^{1/2}\Big)^{1/2}$. Logo,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\Big(x + (x+e^x)^{1/2}\Big)^{-1/2} \cdot \Big(x + (x+e^x)^{1/2}\Big)' \\ &= \frac{1}{2}\Big(x + (x+e^x)^{1/2}\Big)^{-1/2} \cdot \Big[1 + \frac{1}{2}(x+e^x)^{-1/2}(1+e^x)\Big]. \end{aligned}$$

b) Pela regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\operatorname{sen} x} \int_0^{\operatorname{sen} x} e^{t^2} dt = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\int_0^{\operatorname{sen} x} e^{t^2} dt\right).$$

Agora, usando a regra da cadeia e o teorema fundamental do cálculo, obtemos que

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{\operatorname{sen} x} e^{t^2} dt\right) = \frac{d}{du}\left(\int_0^{u} e^{t^2} dt\right) \cdot \frac{du}{dx} = e^{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \cos x,$$

onde $u = \operatorname{sen} x$. Logo,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\operatorname{sen} x} \int_0^{\operatorname{sen} x} e^{t^2} dt = \lim_{x \to 0^+} e^{\operatorname{sen}^2 x} = 1.$$

c) Fazendo a substituição $u = 1 + x^2$ com $du = 2x\,dx$, obtemos que

$$\begin{aligned} \int 2x\sqrt{1+x^2}\; dx &= \int \sqrt{u}\; du = \int u^{1/2}\; du \\ &= \frac{2}{3}\, u^{3/2} + C = \frac{2}{3}\,(1+x^2)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

2ª Questão. (*2.5 pontos*).

Encontre a área da região $\mathcal{R}$ limitada pelas curvas $y+x=6$, $y+x^3=0$ e $2y-x=0$.

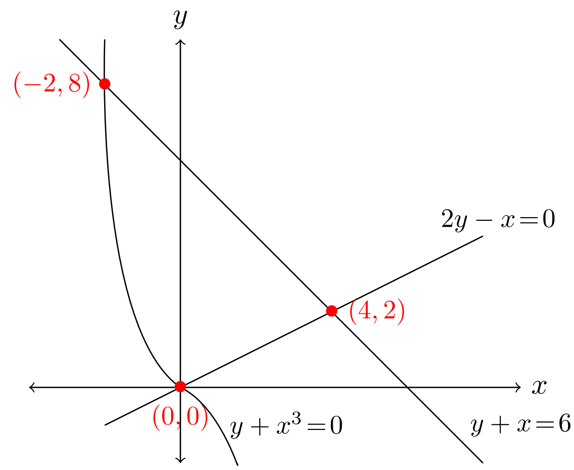
- **Solução.**

Primeiro encontramos os pontos de interseção das retas $y+x=6$, $y+x^3=0$ e $2y-x=0$.
Temos que

$$6-x=-x^3 \qquad \Rightarrow \qquad x=-2,$$

$$6-x=\frac{x}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x=4,$$

$$\frac{x}{2}=-x^3 \qquad \Rightarrow \qquad x=0.$$



Logo, os pontos de interseção são $(-2,8)$, $(0,0)$ e $(4,2)$.
Portanto, a área total é

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{0} 6-x-(-x^3)\,dx + \int_0^4 6-x-\frac{x}{2}\,dx \\ &= \int_{-2}^{0} 6-x+x^3\,dx + \int_0^4 6-\frac{3x}{2}\,dx \\ &= \left[6x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right|_{-2}^{0} + \left[6x-\frac{3x^2}{4}\right|_{0}^{4} = 10+12=22 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

3ª Questão. (*2.5 pontos*).

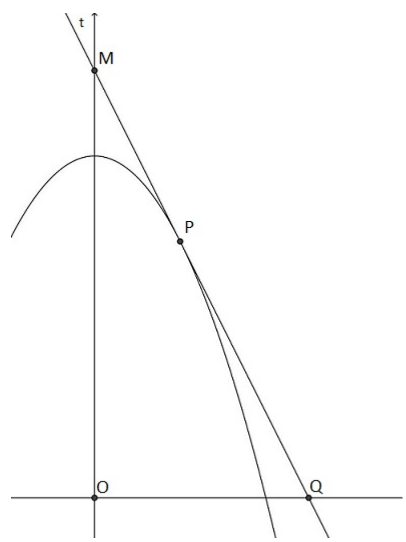
Considere a parábola $y=4-x^2$, no primeiro quadrante.

a) Encontre a equação da reta tangente t à parábola no ponto $P=(x_0,y_0)$.

b) Expresse a área do triângulo OMQ em função de x_0.

c) Encontre o ponto sobre a parábola, tal que o triângulo OMQ tenha área mínima.

d) Sabendo que a taxa de variação da abscissa de P é de $2cm/min$, determine a taxa de variação da área do triângulo OMQ, quando o ponto de tangência é $P=(1,3)$.



- **Solução.**

a) Se $y=f(x)=4-x^2$, então a equação da reta t que passa pelo ponto (x_0,y_0) tangente ao gráfico de f será da forma

$$(y-y_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Como $f'(x_0)=-2x_0$ e $y_0=4-x_0^2$ obtemos que

$$y=-2x_0x+4+x_0^2.$$

b) Se $x = 0$, então $y = 4 + x_0^2$. Logo, $M = (0, 4 + x_0^2)$.

Se $y = 0$, então $0 = -2x_0 x + (4 + x_0^2)$. Logo, $Q = \left(\dfrac{4 + x_0^2}{2x_0}, 0\right)$.

Portanto, a área do triângulo OMQ é

$$A(x_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{4 + x_0^2}{2x_0}\right) \cdot (4 + x_0^2) = \frac{(4 + x_0^2)^2}{4x_0}.$$

Observe que a construção do triângulo OMQ só é possível se $0 < x_0 < 2$.

c) Devemos encontrar o valor de x_0 para o qual $A(x_0)$ é mínima. Temos que

$$\begin{aligned} A'(x_0) &= \frac{2(4 + x_0^2)(2x_0)(4x_0) - 4(4 + x_0^2)^2}{16x_0^2} = \frac{4(4 + x_0^2)(4x_0^2 - x_0^2 - 4)}{16x_0^2} \\ &= \frac{(4 + x_0^2)(3x_0^2 - 4)}{4x_0^2} \end{aligned}$$

Logo,

$$A'(x_0) = 0 \iff x_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Como $A'(x_0) < 0$ sempre que $0 < x_0 < 2/\sqrt{3}$ e $A'(x) > 0$ sempre que $2/\sqrt{3} < x_0 < 2$, podemos concluir que a área é mínima quando $x_0 = 2/\sqrt{3}$. Portanto, a área do triângulo OMQ será mínima no ponto $(2/\sqrt{3}, 8/3)$.

d) Temos que

$$A(x_0) = \frac{(4 + x_0^2)^2}{4x_0} \qquad \text{e} \qquad \frac{dx_0}{dt} = 2 \ cm/min.$$

Logo, a taxa de variação da área do triângulo OMQ em relação ao tempo será

$$\frac{dA}{dt} = \frac{(4 + x_0^2)(3x_0^2 - 4)}{4x_0^2} \cdot \frac{dx_0}{dt} = \frac{(4 + x_0^2)(3x_0^2 - 4)}{2x_0^2}.$$

Quando $x_0 = 1$ temos que

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x_0 = 1} = -\frac{5}{2} \ cm/min.$$

4ª Questão. (*3.0 pontos*).

Considere $\mathbf{f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + 1}}$.

(**a**) Verifique que $\mathbf{f'(x) = \dfrac{5x^2 - 5}{(x^2 + 1)^2}}$ e que $\mathbf{f''(x) = \dfrac{-10x^3 + 30x}{(x^2 + 1)^3}}$.

(**b**) Ache as assíntotas horizontais e verticais caso existam.

(**c**) Identifique os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente.

(**d**) Encontre os valores máximo e mínimo locais e/ou globais caso existam.

(**e**) Identifique os intervalos de concavidade para cima e para baixo e os pontos de inflexão.

(**f**) Usando as informações anteriores faça um esboço do gráfico de $\mathbf{y = f(x)}$.

- **Solução.**

(**a**) (*0.5 pontos*) Usando a regra do quociente junto com a regra da cadeia, obtemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{f'(x)} &= \frac{\mathbf{(4x-5)(x^2+1)-(2x^2-5x+2)(2x)}}{\mathbf{(x^2+1)^2}}\\ &= \frac{\mathbf{4x^3+4x-5x^2-5-4x^3+10x^2-4x}}{\mathbf{(x^2+1)^2}} = \frac{\mathbf{5x^2-5}}{\mathbf{(x^2+1)^2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{f''(x)} &= \frac{\mathbf{(10x)(x^2+1)^2-(5x^2-5)2(x^2+1)(2x)}}{\mathbf{(x^2+1)^4}}\\ &= \frac{\mathbf{10x^3+10x-20x^3+20x}}{\mathbf{(x^2+1)^3}} = \frac{\mathbf{-10x^3+30x}}{\mathbf{(x^2+1)^3}}.\end{aligned}$$

(**b**) (*0.5 pontos*) Temos que

$$\begin{aligned}\lim_{\mathbf{x\to+\infty}} \mathbf{f(x)} &= \lim_{\mathbf{x\to+\infty}} \frac{\mathbf{2x^2-5x+2}}{\mathbf{x^2+1}} = \lim_{\mathbf{x\to+\infty}} \frac{\mathbf{x^2(2-5/x+2/x^2)}}{\mathbf{x^2(1+1/x^2)}}\\ &= \lim_{\mathbf{x\to+\infty}} \frac{\mathbf{2-5/x+2/x^2}}{\mathbf{1+1/x^2}} = \mathbf{2},\end{aligned}$$

De maneira análoga, obtemos que

$$\lim_{\mathbf{x\to-\infty}} \mathbf{f(x)} = \mathbf{2}.$$

Logo, a reta $\mathbf{y=2}$ é a única assíntota horizontal ao gráfico de $\mathbf{y=f(x)}$. Não há assíntotas verticais uma vez que a função $\mathbf{y=f(x)}$ é contínua em toda a reta real.

(**c**) (*0.5 pontos*)
Note que $\mathbf{f}$ é diferenciável em toda a reta real. Assim, devemos analisar o sinal da primeira derivada para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento. Temos que

$$\mathbf{f'(x)} = \frac{\mathbf{5x^2-5}}{\mathbf{(x^2+1)^2}} = \frac{\mathbf{5(x^2-1)}}{\mathbf{(x^2+1)^2}}.$$

Logo, $\mathbf{f'}$ se anula em $\mathbf{x=-1}$ e em $\mathbf{x=1}$. O sinal de $\mathbf{f'}$ é determinado pelo sinal de $\mathbf{x^2-1}$ e, portanto, é positivo em $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ e negativo em $(-1,1)$.
Assim, $\mathbf{f}$ é **crescente** em $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ e **decrescente** em $(-1,1)$.

(**d**) (*0.5 pontos*) Segue do Teste da Primeira Derivada que $\mathbf{f}$ possui um máximo em $\mathbf{x=-1}$ com $\mathbf{f(-1)=9/2}$ e um mínimo em $\mathbf{x=1}$ com $\mathbf{f(1)=-1/2}$.

(**e**) (*0.5 pontos*) Analisemos o sinal da segunda derivada:

$$\mathbf{f''(x)} = \frac{\mathbf{-10x^3+30x}}{\mathbf{(x^2+1)^3}} = \frac{\mathbf{-10x(x^2-3)}}{\mathbf{(x^2+1)^3}}$$

Temos que $\mathbf{f''}$ é positiva nos intervalos $(-\infty,-\sqrt{3})$ e $(0,\sqrt{3})$ e negativa nos intervalos $(-\sqrt{3},0)$ e $(\sqrt{3},+\infty)$. Concluímos, portanto, que o gráfico de $\mathbf{y=f(x)}$ é **côncavo para baixo** em

$$(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$$

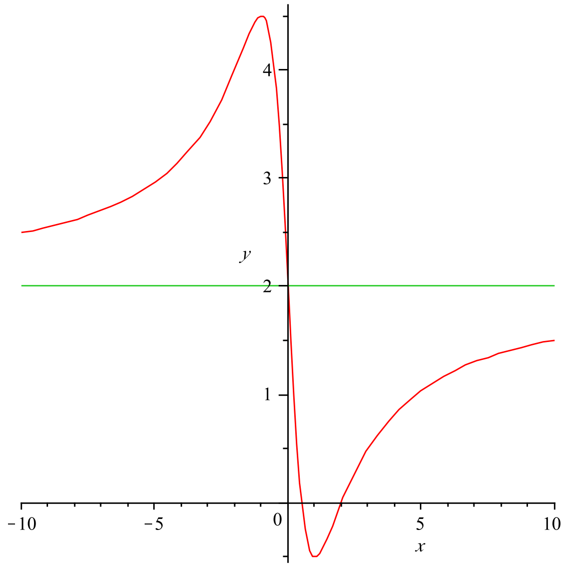
e **côncavo para cima** em

$$(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3}).$$

Consequentemente, $(-\sqrt{3},2-5\sqrt{3}/4)$, $(0,0)$ e $(\sqrt{3},2+5\sqrt{3}/4)$ são pontos de inflexão.

(f) *(0.5 pontos)*

Figura 1: Gráfico



(a) $y(x) = \frac{2x^2-5x+2}{x^2+1}$