Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática - Departamento de Métodos Matemáticos

---

GABARITO DA PROVA FINAL UNIFICADA de CÁLCULO I – 03/07/2012

Escola Politécnica e Escola de Química

Questão 1 (3,0 pontos.) Sejam $A > 0$ e $B > 0$ números reais e considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{Ax} - e^{-Bx}}{2x}, & \text{para } x \neq 0, \\ 1, & \text{para } x = 0. \end{cases}$$

(a) Calcule $f'(x)$, para $x \neq 0$.

(b) Calcule $\lim_{x\to 0} f'(x)$

(c) Se fixarmos $f'(0) = 0$, qual deve ser o valor de A e B para que f e f' sejam contínuas em $x = 0$.

Solução.

(a) Se $x \neq 0$, temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(A\,e^{Ax} + B\,e^{-Bx})2x - 2(e^{Ax} - e^{-Bx})}{4x^2} \\ &= \frac{A\,xe^{Ax} + Bxe^{-Bx} - e^{Ax} + e^{-Bx}}{2x^2} \\ &= \frac{(Ax-1)e^{Ax} + (Bx+1)e^{-Bx}}{2x^2}. \end{aligned}$$

(b) Usando L'Hôspital, obtemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{(Ax-1)e^{Ax} + (B\,x+1)e^{-Bx}}{2x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{A\,e^{Ax} + (Ax-1)A\,e^{Ax} + B\,e^{-Bx} - (Bx+1)B\,e^{-Bx}}{4x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2A^2\,e^{Ax} + (Ax-1)A^2\,e^{Ax} - 2B^2\,e^{-Bx} + (Bx+1)B^2\,e^{-Bx}}{4} \\ &= \frac{2A^2 - A^2 - 2B^2 + B^2}{4} = \frac{A^2 - B^2}{4} \end{aligned}$$

(c) Fixemos $f'(0) = 0$. Para que f seja contínua devemos ter que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{Ax} - e^{-Bx}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{A\,e^{Ax} + B\,e^{-Bx}}{2} = \frac{A+B}{2} = 1$$

Logo, temos o seguinte sistema

$$\frac{A+B}{2} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{A^2 - B^2}{4} = 0.$$

Consequentemente, $A^2 = B^2 \Rightarrow A = B$. Portanto, $A = 1$ e $B = 1$.

Questão 2. Considere a parábola $y = x^2 + 5$.

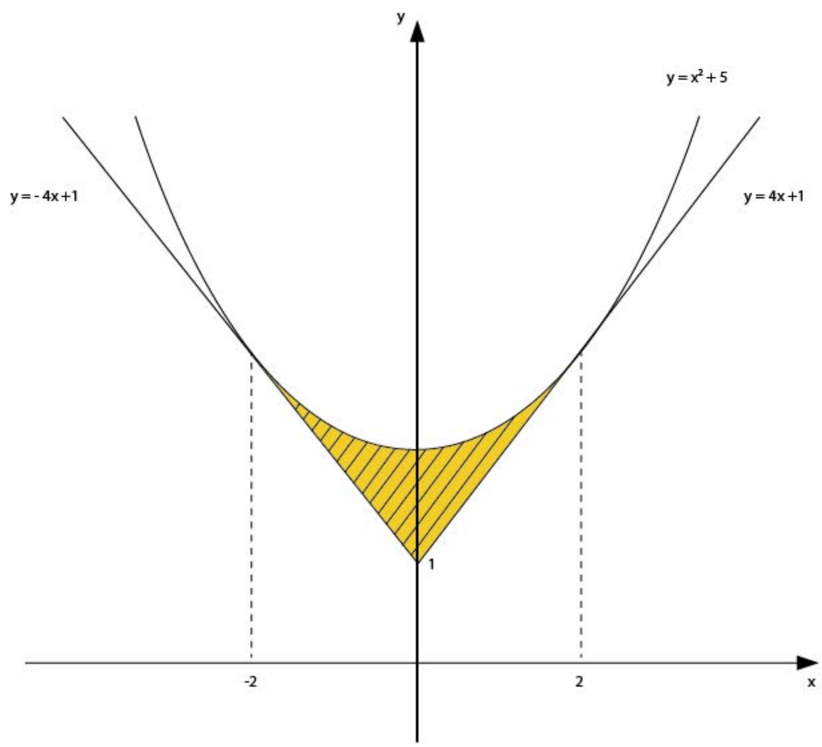
(a) Ache as retas tangentes à parábola nos pontos cuja abscissa é $x = 2$ e $x = -2$.

(b) Calcule a área da região limitada pela parábola e pelas duas retas tangentes do item (a).

Solução.

(a) O coeficiente angular da reta tangente à $y = x^2 + 5$ no ponto (x, y) é $2x$. Portanto, no ponto $(2, 9)$ é 4 e no ponto $(-2, 9)$ é -4. Colocando na equação da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, obtemos que a reta tangente no ponto $(2, 9)$ é $y = 4x + 1$ e no ponto $(-2, 9)$ é $y = -4x + 1$.

(b) A figura abaixo é um esboço da região cuja área vamos calcular.



Por simetria, basta calcular a área da região contida no primeiro quadrante e multiplicar por 2. Portanto,

$$A = 2\int_0^2 [(x^2 + 5) - (4x + 1)]dx = 2\int_0^2 (x^2 - 4x + 4)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)\Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{16}{3}.$$

Questão 3 (2,0 pontos) Resolva as integrais indefinidas abaixo:

(a) $\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x}{2}}\, dx$

(b) $\int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x}\, dx$

Solução.

(a) A integral desejada é imprópria. Portanto, $\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x}{2}}\, dx = \lim_{b\to 0} \int_0^b x^2 \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\, dx$. Fazendo integração por partes duas vezes, vamos ter

$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,dx &= -2x^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + 4\int x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,dx\\ &= -2x^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - 8x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + 8\int \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,dx\\ &= -2x^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - 8x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - 16\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + C\end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_0^b x^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,dx = 16 - 2b^2e^{\frac{-b}{2}} - 8be^{\frac{-b}{2}} - 16e^{\frac{-b}{2}}$$

Portanto,

$$\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,dx = \lim_{b\to\infty}(16 - 2b^2e^{\frac{-b}{2}} - 8be^{\frac{-b}{2}} - 16e^{\frac{-b}{2}}).$$

Para calcular o limite com b tendendo a infinito, primeiro note que

$$\lim_{b\to\infty} e^{-\frac{b}{2}} = 0.$$

Já os limites $\lim\limits_{b\to\infty} b^2e^{-\frac{b}{2}}$, $\lim\limits_{b\to\infty} be^{-\frac{b}{2}}$ são indeterminações do tipo $0\cdot\infty$. Por L' Hospital, temos que

$$\lim_{b\to\infty} b^2e^{-\frac{b}{2}} = \lim_{b\to\infty}\frac{b^2}{e^{\frac{b}{2}}} = \lim_{b\to\infty}\frac{2b}{\frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}}} = \lim_{b\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{4}e^{\frac{b}{2}}} = 0$$

e

$$\lim_{b\to\infty} be^{-\frac{b}{2}} = \lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^{\frac{b}{2}}} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}}} = 0$$

Daí, segue que

$$\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,dx = 16.$$

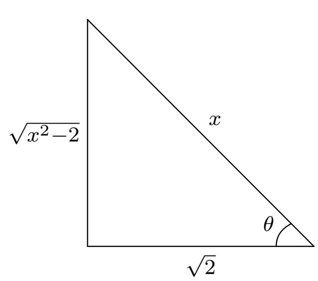
(b) Faça a substituição $x = \sqrt{2}\,sec(\theta)$. Nesse caso, $dx = \sqrt{2}\,sec(\theta)tg(\theta)\,d\theta$ e, portanto,

$$\int\frac{\sqrt{x^2-2}}{x}\,dx = \int\frac{\sqrt{2}\,tg(\theta)}{\sqrt{2}\,sec(\theta)}\sqrt{2}\,sec(\theta)tg(\theta)\,d\theta = \sqrt{2}\int tg^2(\theta)\,d\theta$$

Para resolver a integral em função de θ, lembre-se que $tg^2(\theta) = sec^2(\theta) - 1$. Portanto,

$$\sqrt{2}\int tg^2(\theta)\,d\theta = \sqrt{2}\left(\int sec^2(\theta)\,d\theta - \int d\theta\right) = \sqrt{2}(tg(\theta) - \theta) + C$$

Para voltar com a variável x, estudamos o triângulo abaixo



Segue dele que $tg(\theta) = \dfrac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}$. Portanto,

$$\int\frac{\sqrt{x^2-2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-2} - \sqrt{2}\,arcsec\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Questão 4. (3,0 pontos)

Considere a função definida por $f(x) = \dfrac{x}{(x+2)^3}$. Determine, justificando:

1. O domínio de f e as assíntotas horizontais e verticais, caso existam.
2. Os intervalos onde f é crescente e onde f é decrescente e os pontos de máximo e de mínimo relativos, caso existam.
3. Os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo e os pontos de inflexão, caso existam.
4. O esboço do gráfico de f e os extremos absolutos, caso existam.

Solução.

1. A função está bem definida para todo $\mathbb{R}$ exceto para $x = -2$. Logo,
$$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty).$$
Usando a regra de L'Hospital, temos que
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{(x+2)^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3(x+2)^2} = 0,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(x+2)^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3(x+2)^2} = 0.$$
Logo, a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f. Estudando o sinal de f, obtemos que
$$\lim_{x\to-2^-} \frac{x}{(x+2)^3} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-2^+} \frac{x}{(x+2)^3} = -\infty.$$
Logo, a reta $x = -2$ é uma assíntota vertical do gráfico de f.

2. Temos que
$$f'(x) = \frac{(x+2)^3 - 3x(x+2)^2}{(x+2)^6} = \frac{2-2x}{(x+2)^4}, \quad x \neq -2.$$
Logo, o ponto crítico de f é $x = 1$. Note que $x = -2$ não é um ponto crítico, pois a função f não está definida nesse ponto. Estudando o sinal de f' obtemos que:
   - $f'(x) > 0$, para todo $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1)$. Logo, f é crescente no intervalo $(-\infty, -2) \cup (-2, 1)$.
   - $f'(x) < 0$, para todo $x \in (1, +\infty)$. Logo, f é decrescente no intervalo $(1, +\infty)$.

   Segue do teste da primeira derivada que f possui um máximo local em $x = 1$ com $f(1) = \dfrac{1}{27}$.

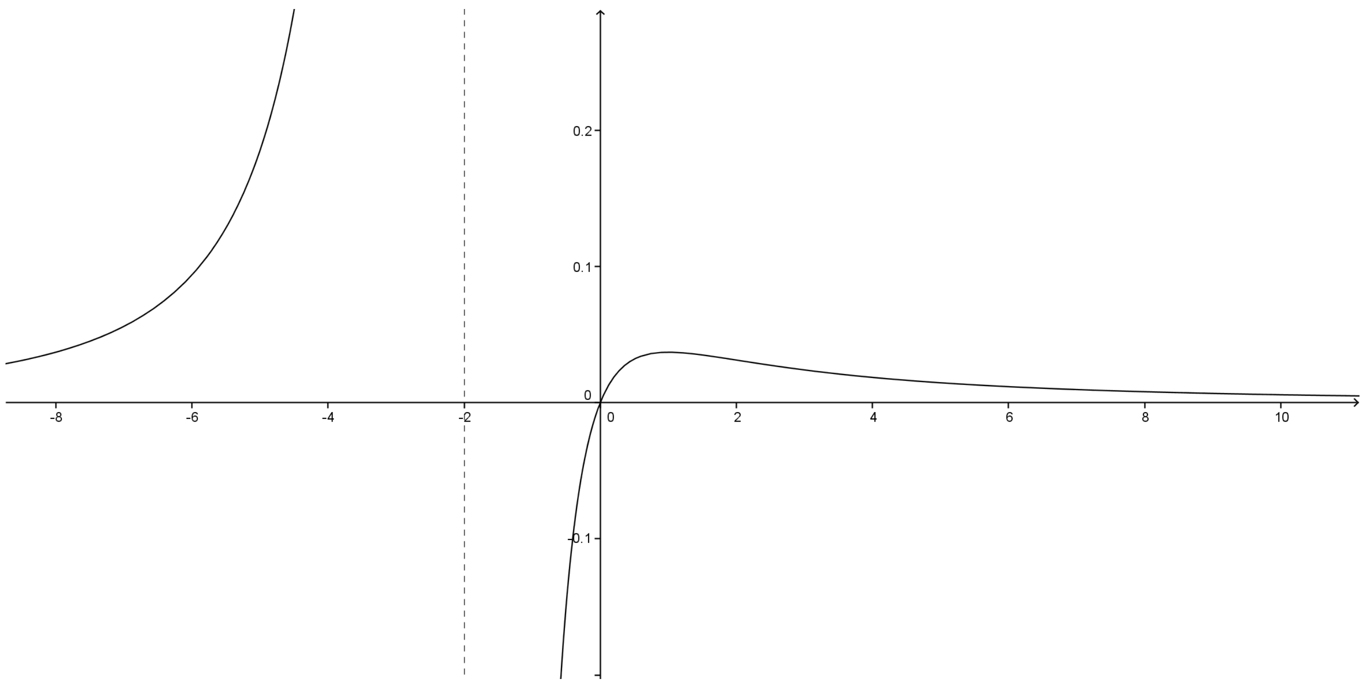
3. Temos que
$$f''(x) = \frac{-2(x+2)^4 - 4(2-2x)(x+2)^3}{(x+2)^8} = \frac{6x-12}{(x+2)^5}$$

Estudando o sinal de f'' obtemos que:

- $f''(x) > 0$, para todo $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Logo, f tem concavidade para cima no intervalo $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.
- $f''(x) < 0$, para todo $x \in (-2, 2)$. Logo, f tem concavidade para baixo no intervalo $(-2, 2)$.

Consequentemente, $(2, 1/32)$ é um ponto de inflexão.

4. Esboço do gráfico.



Finalmente, podemos concluir do gráfico que o ponto $(1, 1/27)$ é apenas um ponto de máximo local, visto que

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x}{(x+2)^3} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -2^+} \frac{x}{(x+2)^3} = -\infty.$$