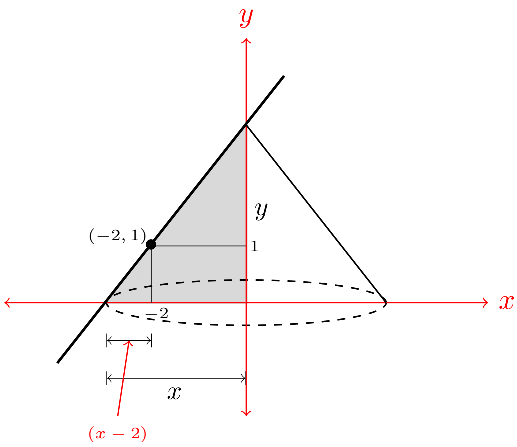
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Matemática
PROVA FINAL UNIFICADA – CÁLCULO I
POLITÉCNICA E ENGENHARIA QUÍMICA 01/12/2011.

GABARITO

1ª Questão. (*2.5 pontos*).

Determine a equação da reta que passa pelo ponto $(-2, 1)$ e que faz com os eixos coordenados um triângulo, no segundo quadrante, de modo que o volume do sólido obtido pela rotação do triângulo em torno do eixo y seja mínimo.

- **Solução.**



Na figura ao lado, sejam

x : Base do triângulo.
y : Altura do triângulo.

A função a ser minimizada é o volume de um cone de raio x e altura y, isto é

$$V = \frac{\pi}{3}x^2 y,$$

onde $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x-2} \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{x}{x-2}$.

Logo, $V(x) = \dfrac{\pi}{3}\dfrac{x^3}{x-2}$ que é contínua em $(2, +\infty)$. Derivando temos

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}\frac{3x^2(x-2) - x^3}{(x-2)^2} = \frac{\pi}{3}\frac{2x^3 - 6x^2}{(x-2)^2}.$$

Assim, $V'(x)$ existe, para todo $x \in (2, +\infty)$. Pontos críticos

$$V'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x^2(x-3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 3 \in (2, +\infty).$$

Estudando o sinal de $V'(x)$ temos

(i) $V'(x) < 0$ no intervalo $(2, 3)$.
(ii) $V'(x) > 0$ no intervalo $(3, +\infty)$.

Logo, como $V(x)$ é contínua em $(2, +\infty)$, $V(x)$ tem um mínimo absoluto em $x = 3$. Alem disso, para $x = 3$ temos que $y = 3$. Portanto a reta passa pelos ponto $(-3, 0)$ e $(3, 0)$. Logo a equação da reta está dada por

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{3} = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = x + 3.$$

2ª Questão. (*2.0 pontos*).

Calcule

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{x^2 - 2x}$.

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}(2x)}{\text{sen}^2(x) - \text{sen}(x) - 2} dx.$

- **Solução.**

(a) Analisando separadamente o numerador e o denominador respectivamente temos que

$$\lim_{x\to 2} = \sqrt{x+2} - \sqrt{2x} = 0 \text{ e } \lim_{x\to 2} = x^2 - 2x = 0.$$

Resultando numa indeterminação "$\frac{0}{0}$". Uma das hipóteses exigidas pelo Teorema do L'Hospital. Sabendo que as funções envolvidas estão satisfazendo as hipóteses restantes, temos pelo L'Hospital que

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{x^2 - 2x} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{2x}}}{2x-2}.$$

Organizando melhor o último limite, temos que

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{2x}}}{2x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x} - 2\sqrt{x+2}}{(2\sqrt{x+2}\sqrt{2x})(2x-2)}.$$

De novo, analisando separadamente o numerador e o denominador respectivamente encontramos que

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{2x} - 2\sqrt{x+2} = -2 \text{ e } \lim_{x\to 2} (2\sqrt{x+2}\sqrt{2x})(2x-2) = 16.$$

Logo, chegamos no resultado do limite abaixo

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{x^2 - 2x} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{2x}}}{2x-2} = -\frac{1}{8}.$$

(b) Usaremos a identidade $\text{sen}(2x) = 2\text{sen}(x)\cos(x)$ e a substituição $u = \text{sen}(x)$ $(dx = \cos(x)dx)$, para deduzir que

$$\begin{aligned} x = 0 &\longrightarrow u = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} &\longrightarrow u = 1. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo temos

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}(2x)}{\text{sen}^2(x) - \text{sen}(x) - 2} dx = \int_0^1 \frac{2u}{u^2 - u - 2} du = \int_0^1 \frac{2u}{(u-2)(u+1)} du.$$

Por frações parciais

$$\frac{2u}{(u-2)(u+1)} = \frac{A}{(u-2)} + \frac{B}{(u+1)} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad B = \frac{2}{3}.$$

Logo

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \frac{2u}{(u-2)(u+1)} du &= \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{(u-2)} du + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{(u+1)} du \\ &= \frac{4}{3} \ln|u-2|\Big|_0^1 + \frac{2}{3} \ln|u+1|\Big|_0^1 \\ &= -\frac{4}{3}\ln(2) + \frac{2}{3}\ln(2) \quad = \quad -\frac{2}{3}\ln(2). \end{aligned}$$

3ª Questão. (*2.5 pontos*).

Seja a função $f(y) = \int_0^y \sqrt{\sec^4(t) - 1}dt$.

1. Calcule o(s) ponto(s) crítico(s) de $f(y)$ no intervalo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.
2. Determine o comprimento de $f(y)$ no intervalo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

- **Solução.**

1. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que

$$f'(y) = \sqrt{\sec^4(y) - 1}.$$

Encontrando os pontos críticos:

$$f'(y) = \sqrt{\sec^4(y) - 1} = 0 \quad \Rightarrow \sec^4(y) = 1 \quad \Rightarrow \sec(y) = \pm 1.$$

Como $y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ devemos ter $\sec(y) = 1$. Logo $y = 0$ é o único número crítico de f em $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

2. O comprimento do gráfico de f no intervalo dado é

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + (f'(y))^2}dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + (\sec(y)^4 - 1)}dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2(y)dy = \operatorname{tg}(y)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2.$$

4ª Questão. (*3.0 pontos*).

Dada a função $f(x) = \dfrac{1 + \ln(x)}{x}$. Determine, justificando:

1. O domínio de f e as assíntotas horizontais e verticais, caso existam.
2. Os intervalos onde f é crescente e onde f é decrescente e os pontos de máximos e de mínimos relativos, caso existam.
3. Os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo e os pontos de inflexão, caso existam.
4. O esboço do gráfico de f e os extremos absolutos, caso existam.

- **Solução.**

1. Domínio de f : $(0, +\infty)$. Cálculo de assíntotas (usando L'Hospital):

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \ln(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Logo, a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f. Além disso

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 + \ln(x)}{x} = -\infty.$$

Portanto a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f.

2. Pontos críticos:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x - 1(1 + \ln(x))}{x^2} = \frac{1 - 1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{-\ln(x)}{x^2}.$$

Assim, $f'(x) = 0$ se e somente se $x = 1$. Portanto $x = 1$ é um número crítico de f. Estudando o sinal de $f'(x)$:

(i) $f'(x) < 0$ para $x > 1$. Então f é decrescente em $(1, +\infty)$.

(ii) $f'(x) > 0$ para $0 < x < 1$. Então f é crescente em $(0, 1)$.

Então, pelo teste da derivada primeira, f tem um máximo relativo em $x = 1$. Máx. relativo : $f(1) = 1$.

3. Como $f'(x) = \dfrac{-\ln(x)}{x^2}$, então

$$f''(x) = \frac{\frac{-1}{x}.x^2 + 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{-x + 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{-1 + 2\ln(x)}{x^3},$$

logo, $f''(x)$ existe, para todo $x > 0$. Tambem

$$f''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -1 + 2\ln(x) \quad \Longrightarrow \quad \ln(x) = 2 \quad \Longrightarrow \quad x = e^{1/2}.$$

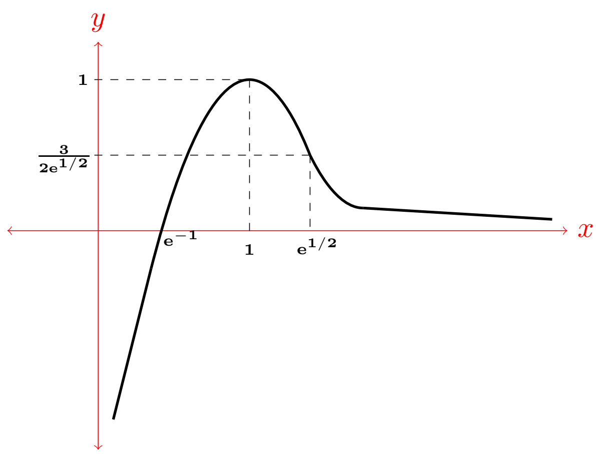
Assim, estudando o sinal de $f''(x)$ teremos:

(i) $f''(x) < 0$ para $0 < x < e^{1/2}$. Então f é côncava para baixo em $(0, e^{1/2})$.

(ii) $f''(x) > 0$ para $x > e^{1/2}$. Então f é côncava para cima em $(e^{1/2}, +\infty)$.

Logo, o gráfico de f tem um ponto de inflexão em $x = e^{1/2}$. Ponto de Inflexão : $(e^{1/2}, \frac{3}{2e^{1/2}})$.

4. Esboço do gráfico.



Finalmente, podemos concluír do gráfico que $f(1) = 1$ é o máximo absoluto de f, pois $f(x) \leq 1$ para todo $x \in (0, +\infty)$.