Universidade Federal do Rio de Janeiro
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Métodos Matemáticos

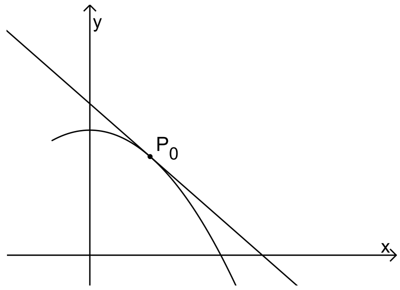
**Prova Final Unificada de Cálculo I - Politécnica e Engenharia Química**
**30/06/2011**

$1^a$ **Questão:** (2 pontos)
Considere a parábola $y = 12 - x^2$, no primeiro quadrante.

**a)** Encontre a equação da reta tangente à parábola, passando pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$.

**b)** Encontre a área do triângulo determinado pelo eixo $x$, eixo $y$ e a reta tangente do item anterior, no primeiro quadrante.

**c)** Encontre o ponto $P_0$ sobre a parábola, tal que o triângulo do item anterior tenha área mínima. Justifique.




**Solução**

**a)** A reta tangente é dada por:

$$y = (12 - x_0^2) + (-2x_0)(x - x_0) = 12 - 2x_0x + x_0^2.$$

**b)** A interseção da reta tangente com o eixo $x$ é obtida fazendo $y = 0$: $x = \dfrac{12 + x_0^2}{2x_0}$.
A interseção da reta tangente com o eixo $y$ é obtida fazendo $x = 0$: $y = 12 + x_0^2$.
Logo a área é dada por:

$$A(x_0) = \frac{(12 + x_0^2)}{2}\left(\frac{12 + x_0^2}{2x_0}\right) = \frac{(12 + x_0^2)^2}{4x_0}, \quad 0 < x_0 \leq \sqrt{12}.$$

**c)** Procurando por pontos críticos:

$$A'(x_0) = \frac{3(12 + x_0^2)(x_0^2 - 4)}{4x_0^2} = 0$$

quando $x_0 = 2$; logo temos um único ponto crítico, $x_0 = 2$.

Como $A'(x_0) < 0$ se $0 < x_0 < 2$, a função é decrescente em $(0, 2)$.
Como $A'(x_0) > 0$ se $x_0 > 2$, a função é crescente em $(2, \sqrt{12})$.
Logo, o ponto $(2, 8)$ é ponto de mínimo local.

Como $A(x_0)$ é uma função contínua em $(0, \sqrt{12}\ ]$ com um único ponto crítico em $(0, \sqrt{12}\ ]$, o ponto $(2, 8)$ é de mínimo absoluto.

$2^a$ **Questão:** (2 pontos)

Seja $r$ a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 \operatorname{tg} x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^{2x}}$ no ponto $(0\,,0)$ e seja $s$ a reta tangente à curva $x^4 + y^4 = x + y$ no ponto $(1\,,1)$.

Pergunta-se: as retas $r$ e $s$ são paralelas? Perpendiculares? Nem paralelas nem perpendiculares?

**Justifique sua resposta!!!**

**Solução**

$$f'(x) = 2x \operatorname{tg} x + x^2 \sec^2 x + \frac{\cos x e^{2x} - 2 \operatorname{sen} x e^{2x}}{e^{4x}}.$$

Então $f'(0) = 1$, ou seja, o coeficiente angular da reta $r$ vale 1.

Por outro lado, derivando implicitamente os dois membros da equação $x^4 + y^4 = x + y$ obtemos

$$4x^3 + 4y^3 y' = 1 + y'.$$

Logo, no ponto $(1\,,1)$, encontramos $y' = -1$ que é o coeficiente angular da reta $s$.

Como o produto dos coeficientes angulares das duas retas é igual a $-1$, concluímos que elas são perpendiculares.

$3^a$ **Questão:** (3 pontos)

Calcule

**a)** $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-5x}x^2\, dx$

**b)** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\, dx$

**Solução**

**a)** Vamos calcular a integral indefinida usando o método de integração por partes. Escolhemos $u = x^2$ e $dv = e^{-5x}dx$, obtendo $du = 2x\, dx$ e $v = \dfrac{e^{-5x}}{-5}$. Logo,

$$\int e^{-5x}x^2\, dx = \frac{e^{-5x}}{-5}x^2 - \int \frac{e^{-5x}}{-5}2x\, dx = -\frac{e^{-5x}}{5}x^2 + \frac{2}{5}\int e^{-5x}x\, dx.$$

Usando novamente o método de integração por partes, escolhendo $u = x$ e $dv = e^{-5x}dx$ e obtendo $du = \ dx$ e $v = \dfrac{e^{-5x}}{-5}$, temos:

$$-\frac{e^{-5x}}{5}x^2 + \frac{2}{5}\int e^{-5x}x\, dx = -\frac{e^{-5x}}{5}x^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{e^{-5x}}{-5}x - \int \frac{e^{-5x}}{-5}\, dx\right) =$$

$$= -\frac{e^{-5x}}{5}x^2 - \frac{2}{25}e^{-5x}x + \frac{2}{25}\int e^{-5x}\, dx.$$

Logo,

$$\int e^{-5x}x^2\, dx = -\frac{e^{-5x}}{5}x^2 - \frac{2}{25}e^{-5x}x - \frac{2}{125}e^{-5x} + C.$$

Portanto

$$\int_0^{\infty} e^{-5x}x^2\, dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-5x}x^2\, dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{e^{-5b}}{5}b^2 - \frac{2}{25}e^{-5b}b - \frac{2}{125}e^{-5b}\right] - \left[-\frac{2}{125}\right],$$

onde

$$\lim_{b\to\infty}\frac{2}{125e^{5b}} = 0$$

e por L'Hospital,

$$\lim_{b\to\infty}\frac{2b}{25e^{5b}} = \lim_{b\to\infty}\frac{2}{125e^{5b}} = 0,$$

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b^2}{5e^{5b}} = \lim_{b\to\infty}\frac{2b}{25e^{5b}} = 0.$$

Concluindo,

$$\int_0^{\infty} e^{-5x}x^2\, dx = \frac{2}{125}.$$

**b)** Fazendo a substituição $u = 3x+1$, obtemos $x = \dfrac{u-1}{3}$ e $dx = \dfrac{du}{3}$. Assim,

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\, dx = \int \frac{u-1}{9\sqrt{u}}\, du = \frac{1}{9}\int \left(u^{1/2} - u^{-1/2}\right)\, du = \frac{1}{9}\left(\frac{2u^{3/2}}{3} - 2u^{1/2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{2(3x+1)^{3/2}}{3} - 2(3x+1)^{1/2}\right] + C$$

$4^a$ **Questão:** (3 pontos)

**a)** Calcule o comprimento de arco da curva $x^2 = (2y)^3$, $1 \leq x \leq 2\sqrt{2}$.

**b)** Calcule a área limitada pela curva $x = 1 - \dfrac{1}{y^2}$ e as retas $x = 1$, $y = 1$ e $y = 4$. Faça um esboço da área que está calculando.

**Solução**

**a)** O comprimento da curva é dado por

$$\int_1^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx.$$

Como

$$y = \frac{x^{2/3}}{2},$$

temos

$$\sqrt{1 + (y'(x))^2} = \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 1}}{3x^{1/3}}.$$

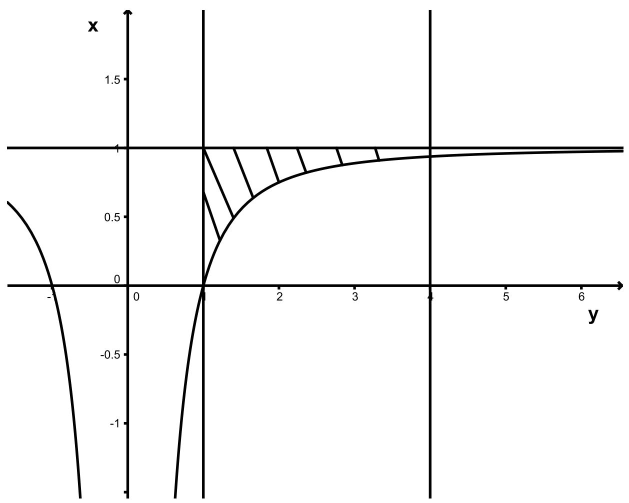
Fazendo a substituição $u = 9x^{2/3} + 1$, obtemos $\dfrac{dx}{3x^{1/3}} = \dfrac{du}{18}$. Logo

$$\int \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 1}}{3x^{1/3}}\, dx = \frac{1}{18} \int u^{1/2}\, du = \frac{u^{3/2}}{27} + C = \frac{(9x^{2/3} + 1)^{3/2}}{27} + C.$$

Assim, o comprimento da curva é:

$$\frac{(19)^{3/2} - (10)^{3/2}}{27}.$$

**b)** Um esboço da área pode ser obtido, trocando a posição dos eixos $x$ e $y$, como na figura abaixo.




Calculando a área,

$$\int_1^4 1 - \left(1 - \frac{1}{y^2}\right)\, dy = \int_1^4 \frac{1}{y^2}\, dy = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}.$$