DEPARTAMENTO de MÉTODOS MATEMÁTICOS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

GABARITO da PROVA FINAL UNIFICADA de CÁLCULO I

13 de dezembro de 2010

Questão 1. (1,5 pontos)

Seja $f(x) = 2x^2 - x$. Determine o ponto do gráfico de f onde a tangente é paralela à reta $3x - y - 4 = 0$ e encontre uma equação dessa reta tangente.

Solução.

Seja $P = (x_p, y_p)$ o ponto procurado. Então, $f'(P)$ é igual ao coeficente angular da reta dada. Como o coeficiente angular da reta $3x - y - 4 = 0$ é 3, temos $f'(P) = 3$, isto é, $4x_p - 1 = 3$. Logo, $x_p = 1$ e P é o ponto $(1, f(1)) = (1, 1)$.
Portanto, a reta pedida tem equação $y - 1 = 3(x - 1)$ ou $y = 3x - 2$.

Questão 2. (3,5 pontos)

Seja $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. Obtenha, caso existam:

(a) As assíntotas horizontais e verticais do gráfico de f.

(b) Os intervalos onde f é crescente e onde é decrescente.

(c) Os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima, onde é côncavo para baixo e os pontos de inflexão.

Usando as informações acima, esboce o gráfico de f e determine seus valores extremos (relativos e absolutos) caso existam.

Solução.

(a) Assíntotas Horizontais.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1/x^2}{1 + 1/x^2} = 1.$$

Logo, $y = 1$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f.

Assíntotas Verticais. Como só existem assíntotas verticais nos números onde a função não é contínua, vamos verificar o que ocorre em $x = \pm 1$.
Note que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = +\infty,$$

pois

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1) \to 0^+ \text{ quando } x \to 1^+ \text{ ou } x \to -1^-.$$

Além disso,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = -\infty,$$

pois

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1) \to 0^- \text{ quando } x \to 1^- \text{ ou } x \to -1^+.$$

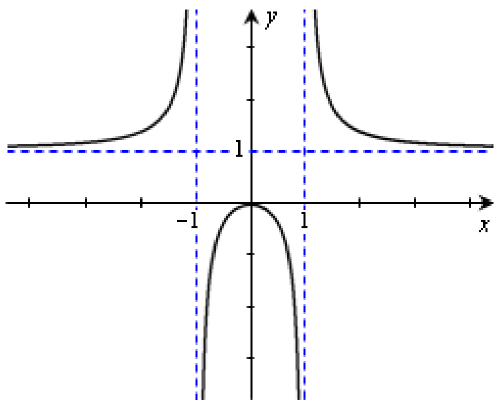
Logo, $x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais do gráfico de f.

(b) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$.

Como $(x^2-1)^2$ é maior que zero para $x \neq \pm 1$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x > 0$. Então, f é crescente nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(-1, 0)$.
Analogamente $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -2x < 0$. Logo, f é decrescente nos intervalos $(0,1)$ e $(1, +\infty)$.
Em vista disso, $(0, f(0))$ é ponto de máximo relativo.

(c) $f''(x) = \dfrac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$.

Como $6x^2+2$ é sempre maior que zero, se $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$, $f''(x) > 0$ e o gráfico de f é côncavo para cima. Se $x \in (-1,1)$, $f''(x) < 0$ e o gráfico de f é côncavo para baixo.



Reunindo as informações acima, obtemos o gráfico ao lado.

Valores extremos.

De acordo com o item (b) e da observação do gráfico, temos apenas o máximo relativo 0 em $x = 0$.

Questão 3. (2,0 pontos)

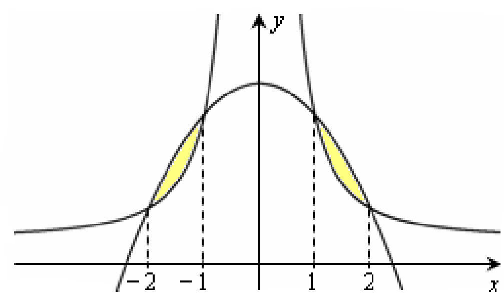
Seja R a região delimitada por cima pela curva $y = -x^2 + 5$ e por baixo pela curva $y = 4/x^2$. Desenhe a região R e calcule sua área.

Solução.

Para achar os pontos de interseção das curvas, basta resolver a equação $4/x^2 = -x^2 + 5$, que é equivalente à equação biquadrática

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

Suas raízes são $x = \pm 1$ e $x = \pm 2$. A região R está compreendida entre as curvas nos intervalos $[-2,-1]$ e $[1,2]$, pois somente nesses intervalos $y = -x^2 + 5$ está acima de $y = 4/x^2$. Portanto, a área de R é



$$A = \int_{-2}^{-1} (-x^2 + 5 - \frac{4}{x^2})\, dx + \int_{1}^{2} (-x^2 + 5 - \frac{4}{x^2})\, dx.$$

Por simetria, basta calcular a segunda integral (as funções são pares!). Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_1^2 (-x^2 + 5 - \frac{4}{x^2})\, dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 5x + \frac{4}{x}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2} = (-\frac{8}{3} + 10 + 2) - (-\frac{1}{3} + 5 + 4) = \frac{2}{3}.$$

Logo,

$$A = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Questão 4. (3,0 pontos)

Calcule:

(a) $\displaystyle\int \frac{e^{2t}}{\sqrt{1-e^t}}\,dt$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$.

Solução.

(a) **Solução 1**: Substituição simples. Esta integral admite várias formas de solução via substituição simples. Uma delas é reescrevê-la na forma

$$\int e^t(1-e^t)^{-\frac{1}{2}}e^t dt$$

e tomar $w = 1 - e^t$. Assim, $-dw = e^t dt$ e $e^t = 1 - w$. Fazendo a substituição na integral acima,

$$\int (1-w)w^{-\frac{1}{2}}(-dw) = \int (w^{\frac{1}{2}} - w^{-\frac{1}{2}})dw = \frac{2}{3}w^{\frac{3}{2}} - 2w^{\frac{1}{2}} + C.$$

Substituindo o valor de w,

$$\int \frac{e^{2t}}{\sqrt{1-e^t}}dt = \frac{2}{3}(1-e^t)^{\frac{3}{2}} - 2(1-e^t)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Solução 2: Integração por partes. Uma outra forma de resolver é aplicando o método de integração por partes:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Fazendo $u = e^t$ e $dv = e^t(1-e^t)^{-\frac{1}{2}}dt$, resulta que

$$du = e^t dt \ \text{ e } \ v = \int e^t(1-e^t)^{-\frac{1}{2}}dt.$$

Para resolver esta última integral, basta fazer uma substituição simples da forma $w = 1 - e^t$. Teremos $-dw = e^t dt$. Então,

$$v = \int w^{-\frac{1}{2}}(-dw) = -2w^{\frac{1}{2}} = -2(1-e^t)^{\frac{1}{2}}.$$

Aplicando na fórmula de integração por partes,

$$\int e^t(1-e^t)^{-\frac{1}{2}}e^t dt = -2e^t(1-e^t)^{\frac{1}{2}} - \int -2(1-e^t)^{\frac{1}{2}}e^t dt.$$

Esta última integral é resolvida de forma semelhante àquela feita para encontrar o valor de v. Portanto,

$$\int \frac{e^{2t}}{\sqrt{1-e^t}}dt = \int e^t(1-e^t)^{-\frac{1}{2}}e^t dt = -2e^t(1-e^t)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}(1-e^t)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Manipulando-se os resultados encontrados na primeira e na segunda solução, chega-se a

$$\int \frac{e^{2t}}{\sqrt{1-e^t}}dt = \int e^t(1-e^t)^{-\frac{1}{2}}e^t dt = \frac{2}{3}(1-e^t)^{\frac{1}{2}}(e^t+2) + C.$$

(b) Substituição trigonométrica.
Tomando $x = 2\,\mathrm{tg}\,\theta$, com $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, obtemos $\sqrt{4+x^2} = 2\sec\theta$ e $dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$. Substituindo,

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\, dx = \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\,\mathrm{tg}\,\theta + \sec\theta| + C.$$

Observando os valores de $\mathrm{tg}\,\theta$ e $\sec\theta$ utilizados na substituição acima, obtemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\, dx = \ln\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}\right| + C = \ln\left|x + \sqrt{4+x^2}\right| + C.$$