UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROVA FINAL de CÁLCULO I – 2010/1

GABARITO

Questão 1.*(1,5 pontos)*

Considere a curva **S** em $\mathbb{R}^2$ definida pela função

$$x = f(y) = e^{\frac{y-3}{2}} + e^{\frac{3-y}{2}}.$$

Determine o comprimento de **S** entre os pontos $P = \left(e^{\frac{-3}{2}}(1+e^3), 0\right)$ e $Q = (2,3)$.

Solução.

O comprimento de arco é dado por : $\displaystyle\int_P^Q \sqrt{1+(x'(y))^2}\, dy$. Assim,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{y-3}{2}} - e^{\frac{3-y}{2}}\right] \Longrightarrow (x'(y))^2 = \frac{1}{4}\left[e^{y-3} + e^{3-y} - 2\right].$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_P^Q \sqrt{1+(x'(y))^2} dy &= \int_P^Q \sqrt{\frac{1}{4}\left[e^{\frac{y-3}{2}} + e^{\frac{3-y}{2}}\right]^2} dy \\ &= \left[e^{\frac{y-3}{2}} - e^{\frac{3-y}{2}}\right]\Bigg|_0^3 = e^{-3/2}(e^3-1). \end{aligned}$$

Questão 2.*(2,0 pontos)*

Seja $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{(x-6)^{2/3}}$. Sabendo que $f'(x) = \dfrac{-4}{x^{1/3}(x-6)^{5/3}}$, determine, caso existam:

(a) As assíntotas horizontais e verticais do gráfico de f.

(b) Os intervalos onde f é crescente e onde é decrescente.

(c) Os valores máximos e mínimos relativos e/ou absolutos de f.

Solução.

(a) Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2/3}}{(x-6)^{2/3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2/3}}{x^{2/3}(1-6/x)^{2/3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(1-6/x)^{2/3}} = 1.$$

De forma similar, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{2/3}}{(x-6)^{2/3}} = 1$. Logo, a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x\to 6^-} \frac{x^{2/3}}{(x-6)^{2/3}} = \lim_{x\to 6^+} \frac{x^{2/3}}{(x-6)^{2/3}} = +\infty.$$

Assim, a reta $x = 6$ é uma assíntota vertical. Como f é contínua para todo $x \neq 6$, o gráfico de f não tem nenhuma outra assíntota vertical.

(b) Analisando o sinal de $f'(x) = \dfrac{-4}{x^{1/3}(x-6)^{5/3}}$:

$$\begin{aligned} x < 0 &\Rightarrow x^{1/3} < 0 \text{ e } (x-6)^{5/3} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ é decrescente,} \\ 0 < x < 6 &\Rightarrow x^{1/3} > 0 \text{ e } (x-6)^{5/3} < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ é crescente,} \\ x > 6 &\Rightarrow x^{1/3} > 0 \text{ e } (x-6)^{5/3} > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ é decrescente.} \end{aligned}$$

Ou seja, f é crescente em $(0,6)$ e decrescente em $(-\infty,0) \cup (6,+\infty)$.

(c) Do item anterior vemos que $f(0)$ é um valor mínimo relativo de f. Porém, em $x = 6$ não há extremo pois f não está definida neste número.
Como $f(0) = 0$ e $f(x) \geq 0, \ \forall x \neq 6, \ f(0)$ é também o mínimo absoluto de f. Este é o único valor extremo de f.

Questão 3.*(2,0 pontos)*

Calcule os seguintes limites:

$$(a) \ \lim_{x\to 0} \left[\frac{\displaystyle\int_0^{\text{sen}\,(x)} \text{tg}\,(t) dt}{\displaystyle\int_0^{x} \text{sen}\,(t) dt} \right] \qquad\qquad (b) \ \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{7}{x^2}\right)^{2x}$$

Solução.

(a) Note que temos a indeterminação $0/0$. Logo aplicando a regra de L'Hôspital e o Teorema Fundamental do Cálculo, teremos que

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0} \left[\frac{\text{tg}\,(\,\text{sen}\,(x)).\cos(x)}{\text{sen}\,(x)} \right] \\ &= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\,(\,\text{sen}\,(x))}{\text{sen}\,(x)} \right) \left(\lim_{x\to 0} \cos(x) \right). \end{aligned}$$

Novamente, no primeiro limite temos a indeterminação $0/0$. Usando L'Hôspital teremos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\,(\,\text{sen}\,(x))}{\text{sen}\,(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(\,\text{sen}\,(x))\cos(x)}{\cos(x)} = \sec^2(\,\text{sen}\,(0)) = 1.$$

Portanto o valor da integral será $I = 1.1 = 1$.

(b) Note que temos a indeterminação 1^∞, portanto usaremos a seguinte identidade:

$$\left(1 + \frac{7}{x^2}\right)^{2x} = e^{\ln\left(1 + \frac{7}{x^2}\right)^{2x}} = e^{2x\ln\left(1 + \frac{7}{x^2}\right)}.$$

Como a função exponencial é uma função contínua, temos que

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{7}{x^2}\right)^{2x} = e^{\left(\lim_{x\to\infty} 2x\ln\left(1 + \frac{7}{x^2}\right)\right)}. \qquad (1)$$

Finalmente, note que (usando L'Hôspital) temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} 2x\ln\left(1+\frac{7}{x^2}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\dfrac{7}{x^2}\right)}{\dfrac{1}{2x}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\dfrac{-14/x^3}{(1+7/x^2)}}{-\dfrac{1}{2x^2}}\right] \\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{28x^2}{x^3\left(1+\dfrac{7}{x^2}\right)}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{28}{x\left(1+\dfrac{7}{x^2}\right)}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, substituíndo em (1), temos

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x^2}\right)^{2x} = e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty} 2x\ln\left(1+\frac{7}{x^2}\right)\right)} = e^0 = 1.$$

Questão 4. *(2,0 pontos)*
Calcule as seguintes integrais:

$$(a)\ \int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \qquad\qquad (b)\ \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

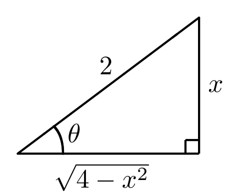
Solução.

(a) Fazendo $x = 2\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow dx = 2\cos\theta d\theta$ e $\sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int \frac{8\,\mathrm{sen}^3\theta}{2\cos\theta}2\cos\theta\,d\theta = 8\int \mathrm{sen}^3\theta\,d\theta \\
&= 8\int \mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta \quad = 8\int(1-\cos^2\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta.
\end{aligned}$$

Seja $u = \cos\theta \Rightarrow du = -\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta$. Logo

$$\begin{aligned}
8\int(1-\cos^2\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta &= 8\int(u^2-1)\,du = 8\left(\frac{u^3}{3}-u\right)+C = \frac{8}{3}\cos^3\theta - 8\cos\theta + C \\
&= \frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^3 - 8\,\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + C \\
&= \frac{1}{3}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3 - 4\sqrt{4-x^2} + C.
\end{aligned}$$



(b) Por partes:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u &=& \ln x \\ dv &=& x^{-1/3}dx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} du &=& (1/x)\,dx \\ v &=& (3/2)\,x^{2/3} \end{array}\right. .$$

Logo,

$$\int x^{-1/3}\ln x\,dx = \frac{3}{2}\,x^{2/3}\ln x - \int\frac{3}{2}\,x^{-1/3}\,dx = \frac{3}{2}\,x^{2/3}\ln x - \frac{9}{4}\,x^{2/3} + C.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx &= \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 x^{-1/3}\ln x\,dx = \lim_{a\to 0^+}\left.\frac{3}{2}\,x^{2/3}\ln x - \frac{9}{4}\,x^{2/3}\right|_a^1 \\
&= \lim_{a\to 0^+}\left(-\frac{9}{4} - \frac{3}{2}\,a^{2/3}\ln a + \frac{9}{4}\,a^{2/3}\right) = -\frac{9}{4}\,,
\end{aligned}$$

já que, pela regra de L'Hôspital,

$$\lim_{a\to 0^+} a^{2/3}\ln a = \lim_{a\to 0^+}\frac{\ln a}{a^{-2/3}} = \lim_{a\to 0^+}\frac{1/a}{-\frac{2}{3}\,a^{-5/3}} = \lim_{a\to 0^+} -\frac{3}{2}\,a^{2/3} = 0\,.$$

Questão 5.*(2,5 pontos)*

(a) Calcule a derivada de $y = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^2+1}\right)$.

(b) Determine o valor de $y'(x)$ no ponto P=(1,1), sabendo que $y = y(x)$ está definido implicitamente pela equação $3\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) + 5\dfrac{y}{x} = 5$.

(c) Sejam A e B os pontos em que o gráfico de $f(x) = x^2 - \alpha x$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, intercepta o eixo-x. Determine α para que as retas tangentes ao gráfico de $f(x)$, em A e B, sejam perpendiculares.

Solução.

(a) Note que: $y = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^2+1}\right) \iff \operatorname{tg}(y) = \sqrt{x^2+1}$. Logo, usando a regra da cadeia teremos

$$\sec^2(y)y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Além disso, como $\operatorname{tg}(y) = \sqrt{x^2+1}$, então $\sec^2(y) = 1 + \operatorname{tg}^2(x) = x^2+2$. Logo

$$y'(x) = \frac{x}{\sec^2(y)\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}.$$

OBSERVAÇÃO: Se usar a fórmula $[\operatorname{arctg}(t)]' = \dfrac{1}{1+t^2}$, a resposta também é válida.

(b) Derivando teremos que $\left(3\ln\dfrac{x}{y} + 5\dfrac{y}{x}\right)' = 0$. Isto é

$$3\frac{y}{x}\left(\frac{y-xy'}{y^2}\right) + 5\left(\frac{y'x-y}{x^2}\right) = 0.$$

Como $y(1) = 1$ temos:

$$3(1-y') + 5(y'-1) = 0 \implies 2y' = 2\,, \quad \text{logo} \quad y'(1) = 1.$$

(c) Note que

$$f(x) = 0 \iff x(x-\alpha) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \alpha.$$

Assim , o gráfico de f intercepta o eixo-x nos pontos A=$(0,0)$ e B=$(\alpha,0)$. Como $f'(x) = 2x-\alpha$, temos $f'(0) = -\alpha$ e $f'(\alpha) = \alpha$.

Portanto, devemos ter $f'(0)f'(\alpha) = -1$. Isto é, $(-\alpha)\alpha = -1$. Logo $\alpha = \pm 1$.