INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prova Final Unificada de Cálculo I
Engenharia e Engenharia Química
16/11/2009

Gabarito

1ª Questão: (3.0 pontos)

Considere a função $f(x) = \dfrac{2-x}{x^3}$. Determine:

a)Domínio $f:\ \mathbb{R} - \{0\}$.

b)Assíntotas:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-x}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{x^3} - \frac{x}{x^3}}{1} = 0$$

a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{2-x}^{>0}}{\underbrace{x^3}_{\to 0^+}} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{2-x}^{>0}}{\underbrace{x^3}_{\to 0^-}} = -\infty$$

então, $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico de f.

c) Derivando $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{2x-6}{x^4}; \qquad f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 3.$$

Estudo do sinal de $f'(x)$:

Antes de $x = 3$, excluindo $x = 0$, $f'(x) < 0$ e depois de $x = 3$ $f'(x) > 0$. Logo,
$x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3)$, $f'(x) < 0 \to f$ é decrescente.
$x \in (3, \infty)$, $f'(x) > 0 \to f$ é crescente.
E ainda, pelo teste da primeira derivada a função tem um mínimo local em $x = 3$. $f(3) = -\frac{1}{27} \Rightarrow$ mínimo local.

d) Derivando novamente $f(x)$:

$$f''(x) = \frac{-6x+24}{x^5}; \qquad f''(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 4.$$

Estudo do sinal de $f''(x)$:

Observe que $f''(x)$ é contínua pra todo o domínio de f e ainda $f''(-1) = -30$, $f''(1) = 18$, $f''(5) = -\frac{6}{5^5}$. Logo:
$x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ o gráfico de f côncavo para baixo.
$x \in (0, 4)$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ o gráfico de f é côncavo para cima.

$f''(x)$ muda de sinal em $x = 4$ e existe reta tangente nesse ponto. Logo, $(4, -\frac{1}{32})$ é um ponto de inflexão do gráfico de f.

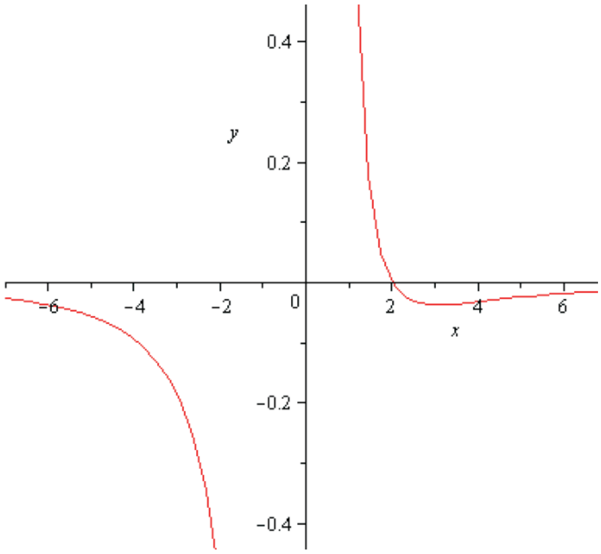


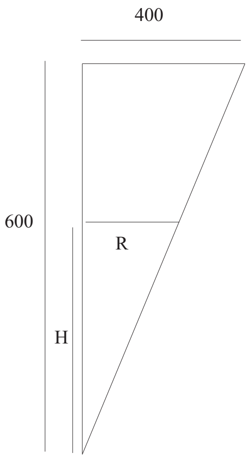
Figure 1: e) Gráfico

Imagem $f : \mathbb{R}$.
f) Não tem extremo absoluto já que $\lim_{x\to\pm 0} f(x) = \pm\infty$.

2ª Questão: (1.5 pontos)

Água está saindo de um tanque em forma de um cone invertido a uma taxa de 10.000 cm^3/min no momento em que água está sendo bombeada para dentro a uma taxa constante. O tanque tem $600cm$ de altura e seu diâmetro no topo é 800 cm. Se o nível da água está subindo a uma taxa de 20 cm/min quando a altura é 200 cm, encontre a taxa com que a água está sendo bombeada para dentro do tanque. O volume de um cone é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Solução:



$$\frac{400}{R} = \frac{600}{H} \Rightarrow R = \frac{2}{3}H$$

A variação do volume de água é dada pela fórmula:

$$\frac{dV}{dt} = \text{entra - sai} \;\Rightarrow\; \frac{dV}{dt} = tx_e(t) - 10000$$

onde $tx_e(t)$ é a taxa de entrada de água no istante t.

Por outro lado, o volume de um cone é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ e $r = \frac{2}{3}h$, então $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2h}{3}\right)^2 h = \frac{4\pi h^3}{27}$, que derivando implicitamente obtemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi h^2 \frac{dh}{dt}}{9} = tx_e(t) - 10000$$

logo, a taxa de entrada no momento em que a altura é $200cm$ era

$$tx_e = \left(\frac{4\pi(200)^2 20}{9} + 10000\right) cm^3/min$$

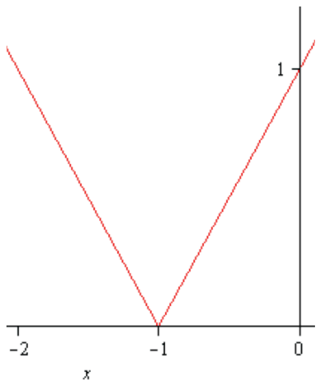
3ª Questão: (2.5 pontos)
Calcule as integrais abaixo:

$a)\int \frac{\cos(\theta)}{\text{sen}^2(\theta) - 6\text{sen}(\theta) + 10} d\theta; \qquad x = \text{sen}(\theta) \;\Rightarrow\; dx = \cos(\theta)d\theta$

$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 10} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 1}; \qquad u = x - 3 \;\Rightarrow\; du = dx$

$\int \frac{du}{u^2 + 1} \;=\; \arctan(u) \;=\; \frac{1}{2}\arctan(\text{sen}(\theta) - 3).$

$b)\int_{-2}^{0} |x+1|dx;$ observando o gráfico da função percebe-se que basta calcular $2\int_{-1}^{0}(x+1)dx$



$$2\int_{-1}^{0}(x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x\Big|_{-1}^{0} = 2(1/2) = 1.$$

$c)\int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\left(\int_0^t xe^{-x}dx\right);$

Usando integração por partes para resolver $\int_0^t xe^{-x}dx;$ $u = x$ e $dv = e^{-x}dx$, então

$du = dx$ e $v = -e^{-x} \Rightarrow (xe^{-x})\Big|_0^t - \int_0^t(-e^{-x})dx = -e^{-t}(t+1) + 1 = -\frac{t}{e^t} - \frac{1}{e^t} + 1,$

$$\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t}{e^t}-\frac{1}{e^t}+1\right),\quad \text{onde} \quad \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t} \quad \text{por L'hospital é} \quad \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}=0, \quad \text{logo}$$
$$-\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}-\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}+\lim_{t\to\infty}1=-0-0+1=1$$

4ª Questão: (1.0 pontos)
Suponha que a função $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ satisfaça:
$i)$ $f(1)=1$;
$ii)$ f' é contínua em $[1,2]$ e $\int_1^2 f'(t)dt=3$.
Qual é o valor de $f(2)$?

Usando o TFC, temos que

$$\int_1^2 f'(t)dt=f(2)-f(1)=f(2)-1 \text{ como } \int_1^2 f'(t)dt=3\Rightarrow f(2)=2.$$

5ª Questão: (2.0 pontos)
Esboce e calcule a área da região D limitada pelo gráfico de $f(x)=x^3+2$ e sua reta tangente no ponto $(1,3)$.

$f'(x)=3x^2$, logo a reta tangente à função no ponto $(1,3)$ tem equação $y-3=3(x-1)=3x$. Para obter os pontos de interseção: $x^3+2=3x\Rightarrow x^3-3x+2=0$ que tem raízes 1 (dupla) e $x=-2$. Portanto,

$$\text{area}(D)=\int_{-2}^{1}(x^3+2-3x)dx=\left(\frac{x^4}{4}+2x-\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{-2}^{1}=\frac{27}{4}$$

Esboço: