INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Exame Final de Cálculo I
Engenharia e Engenharia Química
29/06/2009

1ª Questão: (1.0 pontos)
Calcule as integrais :

a) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2(x)}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln(2v))}{v\ln(2v)}\,dv.$

Solução

a) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2(x)}\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\sin x}\,dx = \int cossec(x)cotan(x)\,dx = -cossec x + C$

b) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln(2v))}{v\ln(2v)}\,dv = \frac{[\ln(\ln(2x))]^2}{2} + C$

2ª Questão: (2.0 pontos)
Considere o cone gerado pela rotação do triângulo retângulo ABC, formado pelos pontos A=(0,0), B=$(x,0)$ **e** $C=(0,y)$**, em torno do eixo y. A hipotenusa** $\overline{BC}$ **mede** $\sqrt{3}$**. Determine os valores de** x **e** y **que dão o maior volume possível ao cone.**
Solução
O volume do cone é : $V = \dfrac{\pi}{3}x^2y$**. Temos que** $x^2+y^2=3$.
Assim o volume V do cone vale $V(y) = \dfrac{\pi}{3}(3-y^2)y$**, para** $y \in [0,\sqrt{3}]$**. Derivando ambos os lados temos:** $V'(y) = \dfrac{\pi}{3}(3-3y^2)$
Então, $V'(y) = 0 \Rightarrow y = -1 \quad \text{ou} \quad y = 1$**, sendo y=1 o único ponto crítico para** $0 < y < \sqrt{3}$**. Como** $V''(1) = -2\pi < 0$ **y=1 é ponto de máximo em** $(0,\sqrt{3})$**. Como V(0)=0 e v(**$\sqrt{3}$**)=0 ,vemos que y=1 e** $x=\sqrt{2}$ **darão o maior volume possível para este cone.**

3ª Questão: (2.0 pontos)
Determine uma função $f:(0,\infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ **tal que satisfaça a :**
i) $f(3) = \frac{1}{5}$.
ii) $\displaystyle\int_0^x tf'(t)\,dt = \frac{x^2}{x+2}$

Solução
Derivando ambos os lados temos : $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int_0^x tf'(t)\,dt\right) = \frac{2x(x+2)-x^2}{(x+2)^2} = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}.$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo : $\displaystyle xf'(x) = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$

Logo, $f^{'}(x) = \dfrac{x+4}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{2}{(x+2)^2}$**.**

Integrando ambos os lados : $f(x) = \ln(x+2) - \dfrac{2}{x+2} + C$

Como $f(3) = \frac{1}{5}$ **temos** $C = \dfrac{3}{5} - \ln 5$**.**

Portanto, $f(x) = \ln(x+2) - \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{3}{5} - \ln 5$

<u>4ª Questão:</u> (2.0 pontos)
Considere f e g funções tais que $f, g : [1, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ **definidas por:**

$f(x) = \dfrac{ln(x)}{x^3}$ **e** $g(x) = \dfrac{1}{x^3}$

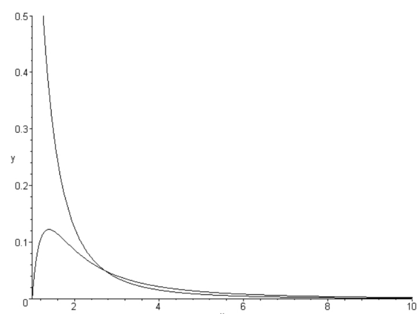
Determine o valor da área compreendida entre a função f e a função g.

<u>Solução</u>

$f^{'}(x) = \dfrac{x^2(1 - 3\ln x)}{x^3} = \dfrac{1 - 3\ln x}{x}$**.**

Assim, $f^{'}(x) = 0 \Rightarrow \ln x = \dfrac{1}{3}$**. Logo, x=**$\sqrt[3]{e}$**.**

Como $f(x) = g(x) \Rightarrow x = e$**, temos que:**



i)Para $1 \le x \le e \rightarrow f(x) \le g(x)$
ii)Para $e \le x \le \infty \rightarrow g(x) \le f(x)$**.**

Também temos:

iii) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} + C$

iv) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} = -\frac{1 + 2\ln x}{4x^2} + C$

Então, a área pedida A vale:

$$A = \int_1^e \frac{1}{x^3} - \frac{\ln x}{x^3}\, dx + \int_e^\infty \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{x^3} dx$$

$$\int_1^e \frac{1}{x^3} - \frac{\ln x}{x^3}\, dx = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1 + 2\ln x}{4x^2}\Bigg|_1^e = \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{4}.$$

$$\int_e^\infty \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{x^3} dx = -\left(\frac{1 + 2\ln x}{4x^2}\right) + \frac{1}{2x^2}\Bigg|_e^\infty = -\left[-\frac{3}{4e^2} + \frac{1}{2e^2}\right] + \lim_{x\to\infty}\left[-\left(\frac{1 + 2\ln x}{4x^2}\right) + \frac{1}{2x^2}\right]$$

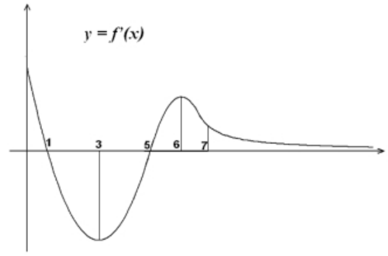
$$= \frac{1}{4e^2} + \lim_{x\to\infty}\left[-\left(\frac{1 + 2\ln x}{4x^2}\right) + \frac{1}{2x^2}\right]$$

Usando L´Hospital, obtemos:

$$\int_e^\infty \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{4e^2}$$

Assim, $A = \dfrac{1}{4e^2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4e^2} = \dfrac{1}{2e^2} + \dfrac{1}{4}$

<u>5ª Questão:</u> (3.0 pontos)



A figura ao lado mostra o gráfico de $y = f'(x)$, a derivada da função $f(x)$, para $x > 0$.

a) Sabendo que, para $x \geq 7$, $f'(x) = \dfrac{14}{x}$, e que $f(7) = 0$, pede-se $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

b)Sabendo ainda que :

$f(0) = -5$. O mínimo de f no intervalo [1,7] é $y = -5$. O máximo de f no intervalo [1,7] é $y = 4$. PEDE-SE um esboço do gráfico de $f(x)$, assinalando :

i)Os pontos (x, y) (caso existam) de máximo ou mínimo locais ou absolutos.

ii)Os valores de x(caso existam) para os quais há ponto de inflexão.

<u>Solução</u>

a)Se $f'(x) = \dfrac{14}{x}$ e $f(7) = 0$,pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que para $x \geq 7$:

$f(x) = \displaystyle\int_7^x \frac{14}{u}\, du = 14(\ln x - \ln 7)$ **e** $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

b)Como f´(1)=0 e f´(5)=0 $\Rightarrow$ x=1 e x=5 são pontos críticos em $[0, \infty)$.

Estudo do sinal de f´(x).

i)Para $x \in (1, 5)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ f é decrescente em [1,5].

ii)Para $x \in (0, 1) \cup (5, \infty)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f é crescente em $x \in (0, 1) \cup (5, \infty)$.

Pelo teste da primeira deriva, f tem um máximo local em x=1 e um mínimo local em x=5.

Estudo do sinal de f"(x).

i)Para $x \in (0, 3)$, f'(x) é decrescente, e temos $f''(x) < 0$. Portanto, o gráfico de f é côncavo para baixo neste intervalo.

ii)Para $x \in (3, 6)$, f'(x) é crescente, logo $f''(x) > 0$ e o gráfico de f é côncavo para cima neste intervalo.

iii)Para $x \in (6, \infty)$, f´(x) é decrescente e temos $f''(x) < 0$ sendo o gráfico de f côncavo para baixo neste intervalo.

Como f"(3)=0 e f"(6)=0 e há mudança de concavidade nos pontos de abscissas x=3 e x=6, estes pontos são pontos de inflexão.

Gráfico de f.

O menor valor que f asssume é -5; os pontos (0,-5) e (5,-5) são pontos de mínimo absoluto . Como $\lim_{\infty} f(x) = +\infty$, f não tem máximo absoluto. Assim, o gráfico pedido é: