Universidade Federal do Rio de Janeiro
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Métodos Matemáticos

Gabarito da Prova Final Unificada de Cálculo I

Engenharia e Matemática

03/12/2008

1^a **Questão:** (1,5 ponto) Uma partícula move-se ao longo da curva cuja equação é

$$\frac{xy^3}{1+y^2} = \frac{8}{5}\ .$$

Suponha que a coordenada x está crescendo a uma taxa de 6 *unidades/s* quando a partícula está no ponto $(1,2)$. Nesse momento a partícula está subindo ou descendo? Com que taxa?

Derivamos $5xy^3 = 8(1+y^2)$, em relação a t, onde t é o tempo, e obtemos:
$5\dfrac{dx}{dt}\, y^3 + 15x\, y^2\, \dfrac{dy}{dt} = 16y\, \dfrac{dy}{dt}$.
Quando $(x,y) = (1,2)$, $\dfrac{dx}{dt} = 6$ e substituindo temos: $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{60}{7}$.
Logo, a partícula está descendo à taxa de $-\dfrac{60}{7}$ *unidades/s*, nesse momento.

2^a **Questão:** (2 pontos) Considere a função $f(x) = \ln x$.

1. Ache a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ quando $x = \mathrm{e}^2$.
2. Calcule a área da região limitada por $y = \ln x$, a reta tangente encontrada no item anterior, e o eixo x.

1. Como $f'(x) = 1/x$, a reta tangente é dada pela equação $y - f(\mathrm{e}^2) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}(x - \mathrm{e}^2)$, que pode ser reescrita como $y = 1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^2}$.

2. A reta tangente intersecta o gráfico da função logaritmo no ponto $(\mathrm{e}^2, 2)$ e intersecta o eixo x no ponto $(-\mathrm{e}^2, 0)$. Logo, a área pode ser dada pela integral:

$$\int_0^2 [\mathrm{e}^y - (\mathrm{e}^2 y - \mathrm{e}^2)]\, dy = \mathrm{e}^y - \frac{\mathrm{e}^2\, y^2}{2} + \mathrm{e}^2 y\, \Big|_0^2 = (\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e}^2) - (\mathrm{e}^0) = \mathrm{e}^2 - 1\ .$$

3^a **Questão:** (2 pontos) Calcule as integrais a seguir:

1. $\displaystyle\int_0^\infty x^2\, \mathrm{e}^{-x}\, dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \mathrm{sen}\,(2x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{sen}^2(x)}\, dx$

1. $\displaystyle\int_0^\infty x^2\, \mathrm{e}^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^2\, \mathrm{e}^{-x}\, dx$;

   Resolvendo por partes a integral

$$\int x^2\,e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} - \int -2xe^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - \int -2e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C.$$

Logo:

$$\int_0^{\infty} x^2\,e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} x^2\,e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\left(-\frac{b^2}{e^b} - \frac{2b}{e^b} - \frac{2}{e^b}\right) - (-2)\right] = 2,$$

pois por L'Hospital

$$\lim_{b\to\infty} -\frac{b^2}{e^b} = \lim_{b\to\infty} -\frac{2b}{e^b} = \lim_{b\to\infty} -\frac{2}{e^b} = 0.$$

2. Integramos $\int \operatorname{sen}(2x)\,e^{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx$ fazendo a substituição $u = \operatorname{sen}^2(x)$.
   Como $\dfrac{du}{dx} = 2\operatorname{sen}x\cos x = \operatorname{sen}(2x)$,
   $$\int \operatorname{sen}(2x)\,e^{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = \int e^u\,du = e^u + C = e^{\operatorname{sen}^2(x)} + C\ .$$
   Logo
   $$\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}(2x)\,e^{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = e^{\operatorname{sen}^2(x)}\Big|_0^{\pi/6} = e^{1/4} - 1\ .$$

4^a **Questão:** (2 pontos)

1. A função a seguir possui uma assíntota horizontal em seu gráfico? Dê sua equação, se ela existir.
   $$F(x) = x - \sqrt{x^2+3x}\ .$$
2. Considere $g(x) = \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\int_1^{2x-1} \frac{t^2}{\sqrt{8+t^4}}\,dt$. Calcule $g(1)$ e $g'(1)$.

1. Repare que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$.
   Mas, quando calculamos
   $$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-\sqrt{x^2+3x})(x+\sqrt{x^2+3x})}{x+\sqrt{x^2+3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x}{x+\sqrt{x^2+3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3}{1+\sqrt{1+\frac{3}{x}}} = \frac{-3}{2}\ ,$$
   o que mostra que $y = -3/2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de $F(x)$.
2. Primeiramente, $g(1) = \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\int_1^1 \frac{t^2}{\sqrt{8+t^4}}\,dt = \frac{\pi}{2} + 0.$
   Sejam $f(x) = 2x-1$ e $h(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{8+t^4}}\,dt.$
   Temos $g(x) = h(f(x))$, $h'(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{8+x^4}}$ (pelo teorema fundamental do cálculo),
   $f'(x) = 2$ e $g'(x) = h'(f(x))\ f'(x) = \dfrac{(2x-1)^2}{\sqrt{8+(2x-1)^4}}\ 2$.
   Logo $g'(1) = 2/3$.

5^a **Questão:** (2,5 pontos) Considere a função definida por $h(x) = x^{2/3}(x-3)^{1/3}$. Determine, caso existam:

1. O domínio de $h(x)$;
2. Os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente;
3. Os valores de máximo e mínimo locais e/ou absolutos;
4. Os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão;

Use as informações anteriores para fazer um esboço do gráfico de h.

1. O domínio é $\mathbb{R}$.
2. Como a derivada $h'(x) = \dfrac{x-2}{x^{1/3}(x-3)^{2/3}}$, fazendo o estudo de sinal de $h'(x)$, temos que $h(x)$ é crescente em $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ e $h(x)$ é decrescente em $(0, 2)$.
3. Os candidatos a máximo e mínimo locais são os pontos $(2, -\sqrt[3]{4})$, $(0, 0)$ e $(3, 0)$. Pelo estudo de sinal feito no item anterior, temos que o ponto $(2, -\sqrt[3]{4})$ é ponto de mínimo local e o ponto $(0, 0)$ é ponto de máximo local.
4. Como a derivada segunda $h''(x) = \dfrac{-2}{x^{4/3}(x-3)^{5/3}}$, fazendo o estudo de sinal de $h''(x)$, temos que a concavidade está voltada para cima em $(-\infty, 3)$ e a concavidade está voltada para baixo em $(3, \infty)$. O ponto $(3, 0)$ é, portanto, um ponto de inflexão.