Gabarito da Prova Final Unificada de Cálculo I

Engenharia, Matemática Aplicada e Ciência da Computação

07/07/2008

1ª Questão:

Sejam a e b números reais e a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x+a & \text{se } x\le 0;\\ \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} & \text{se } 0<x<\pi;\\ b & \text{se } x\ge \pi.\end{cases}$$

Determine a e b para que f seja contínua. Justifique suas respostas.

Solução: Da definição de $f(x)$, temos que ela é uma função contínua se, e somente se, for contínua nos pontos $x=0$ e $x=\pi$, isto é,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to \pi^-} f(x)=\lim_{x\to \pi^+} f(x)=f(\pi)$$

Calculando os limites acima:

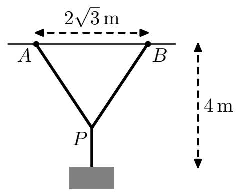
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+a)=a;\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}=1;\end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^-}\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to \pi^-}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}=0;\\ \lim\limits_{x\to \pi^+} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^+} b=b.\end{cases}$$

Portanto, $f(x)$ é uma função contínua se, e somente se, $a=1$ e $b=0$.

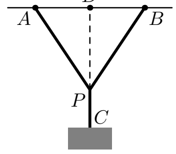
2ª Questão:

Um peso deve ficar suspenso a 4m de uma superfície horizontal por meio de uma armação de arame em forma de Y, como na figura ao lado (onde os pontos A, B e P são os vértices de um triângulo isósceles). Se os pontos de sustentação A e B distam $2\sqrt{3}$m, determine o comprimento mínimo de arame necessário para a armação.



Solução: Seja $x=\overline{PC}$. Então $\overline{DC}=4-x$ e segue do Teorema de Pitágoras que

$$\overline{AP}=\overline{BP}=\sqrt{3+(4-x)^2}.$$



Como o comprimento total do arame é $\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{PC}$, devemos considerar a função

$$L(x)=x+2\sqrt{3+(4-x)^2}=x+2\sqrt{x^2-8x+19}.$$

Observe que para que o peso fique a 4m abaixo da superfície, é necessário que se $x\in(0,4)$, que será o domínio de $L(x)$.

Calculemos os pontos críticos de L:

$$L'(x) = 1 + \frac{2x-8}{\sqrt{x^2-8x+19}} = 0 \iff \sqrt{x^2-8x+19} = 8-2x.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da equação acima, obtemos

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \quad \text{cujas raízes são } x_0 = 3,\ x_1 = 5.$$

Portanto, o único ponto crítico de L é $x_0 = 3$, já que $x_1 = 5$ não está no seu domíno.
Para concluir que x_0 é ponto de mínimo, analisemos o sinal da derivada de L:

$$L'(x) > 0 \iff \sqrt{x^2-8x+19} > 8-2x.$$

Elevando ao quadrado a desigualdade acima, obtemos $x^2-8x+15 < 0$, o que ocorre somente se $x \in (3,5)$. Assim, L é estritamtne crescente no intervalo $(3,4)$ e estritamente decrescente no complementar, isto é, em $(0,3)$. Portanto, $x_0 = 3$ é, de fato, ponto de mínimo global.

3ª Questão:

Considere a função $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = \ln x + 1$ e $f(1) = 1$.

a) Determine os intervalos onde f é crescente e onde é decrescente;

b) Determine os intervalos onde f é convexa (concavidade para cima) e onde é côncava (concavidade para baixo), explicitando seus pontos de inflexão;

c) Determine $f(x)$ e esboce seu gráfico.

Solução: • Analisemos o sinal de $f'(x)$.

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > \dfrac{1}{\mathrm{e}}; \\ f'(x) < 0 \iff \ln x < -1 \iff x < \dfrac{1}{\mathrm{e}}. \end{cases}$$

Portanto, f é crescente no intervalo $(1/\mathrm{e},+\infty)$ e decrescente em $(0,1/\mathrm{e})$ e, conseqüentemente, $x_0 = \mathrm{e}^{-1}$ é ponto de mínimo global.

• Analisemos a concavidade de $f(x)$. Como $f''(x) = 1/x > 0$ para todo $x > 0$, segue que f é função convexa, isto é, seu gráfico tem concavidade para cima e, conseqüentemente, não possui pontos de inflexão.

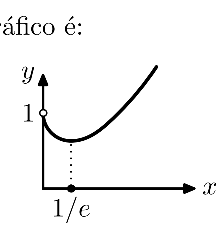
• Determinemos $f(x)$. Por definição, $f(x)$ é uma primitiva de $f'(x) = \ln x + 1$. Como por hipótese $f(1) = 1$, segue do Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$\int_1^x f'(t)\,dt = f(x) - f(1) = f(x) - 1 \quad\Rightarrow\quad f(x) = \int_1^x f'(t)\,dt + 1.$$

Calculemos a integral:

$$\int_1^x f'(t)\,dt = \int_1^x \Big[\ln t + 1\Big]\,dt = t\ln t\Big|_1^x = x\ln x.$$

Portanto, $f(x) = x\ln x + 1$ e seu gráfico é:

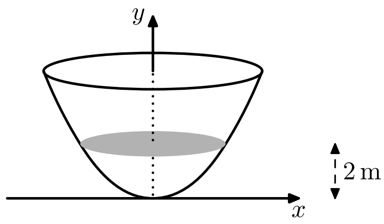


Observe que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty.$$

$4^{\underline{a}}$ Questão:

Um reservatório tem a forma do parabolóide de revolução obtido girando-se o gráfico de $y = x^2$ em torno do eixo y (com as escalas dos eixos em metros), como na figura ao lado. Sabendo que este reservatório está sendo preenchido com água a uma taxa de 0,25 m^3/min, determine:



a) o volume de água no instante t_0 em que seu nível está a 2 metros de altura em relação ao solo;
b) a velocidade no instante t_0 do item (a) com que o nível da água está subindo.

Solução: Como o reservatório tem a forma de um sólido de revolução, o volume de água num instante arbitrário t em que a altura do nível de água é $h(t)$ é

$$V(t) = \int_0^{h(t)} \pi y\, dy = \frac{\pi}{2} y^2 \Big|_0^{h(t)} = \frac{\pi}{2} h(t)^2.$$

No instante particular t_0 em que a altura é 2 metros, temos $V(t_0) = 2\pi$ m^3.
Se o reservatório está sendo preenchido a uma taxa constante de $0,25$ m^3/min, então $V'(t) = 0,25 = 1/4$ par todo t. Assim, no instante t_0,

$$\frac{1}{4} = V'(t_0) = \pi h(t_0) h'(t_0) = 2\pi h'(t_0) \quad \Rightarrow \quad h'(t_0) = \frac{1}{8\pi}.$$

Portanto, no instante t_0, o nível da água está subindo a uma taxa de $1/8\pi$ m/min.

$5^{\underline{a}}$ Questão:

Determine a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e os possíveis valores de $a > 0$ tais que

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t}\, dt = \frac{1}{2} \ln^2 x - \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Solução: Primeiramente, observe que

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t}\, dt = \frac{1}{2} \ln^2 x - \frac{1}{2}, \quad \forall\, x > 0$$

implica, em particular para $x = a$,

$$0 = \int_a^a \frac{f(t)}{t}\, dt = \frac{1}{2} \ln^2 a - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \ln^2 a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \mathrm{e} \text{ ou } a = \mathrm{e}^{-1}.$$

Seja

$$F(x) = \int_a^x \frac{f(t)}{t}\, dt. \tag{1}$$

Então, por hipótese,

$$F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} - \frac{1}{2}, \quad \text{de modo que} \quad F'(x) = \frac{\ln x}{x}. \tag{2}$$

Admitindo que f seja contínua, temos de (1) e do Teorema Fundamental do Cálculo,

$$F'(x) = \frac{f(x)}{x} \tag{3}$$

e conseqüentemente, de (2) e (3), $f(x) = \ln x$ para todo $x > 0$.