Universidade Federal do Rio de Janeiro
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Gabarito da Segunda Prova Unificada de Cálculo 1 - 2014/2

Engenharia e Engenharia Química

25/11/2014

1ª Questão:

(1) Calcule as seguintes integrais:

$$(a) \quad \int e^{\sqrt{x}}\, dx, \quad (b) \quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}, \quad (c) \quad \int_0^1 \frac{\ln(x^2+2x+1)}{x+1}\, dx.$$

(2) Determine o valor de R tal que

$$\int_1^R \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+x} = 1.$$

Solução: (1a) Fazendo a substituição $u = \sqrt{x}$, obtemos $du = 1/2\sqrt{x}$ e

$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx = 2\int ue^u\, du.$$

Integrando por partes,

$$2\int ue^u\, du = 2\left(ue^u - \int e^u\, du\right) = 2(u-1)e^u + C.$$

Portanto,

$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C.$$

(1b) Fazendo a substituição trigonométrica $x = \tan(\theta)$, temos $dx = \sec^2(\theta)\, d\theta$. Logo

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\sec(\theta)}{\tan^2(\theta)}\, d\theta = \int \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}^2(\theta)}\, d\theta.$$

Agora, com a substituição simples $u = \operatorname{sen}(\theta)$, temos $du = \cos(\theta)\, d\theta$ e

$$\int \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}^2(\theta)}\, d\theta = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} + C.$$

Para voltar à variável original x, observe que

$$x = \tan(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}}.$$

Logo
$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$
de onde se conclui que
$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C.$$
(1c) Observe que $\ln(x^2+2x+1) = \ln\big((x+1)^2\big) = 2\ln(x+1)$. Logo,
$$\int_0^1 \frac{\ln(x^2+2x+1)}{x+1}\,dx = 2\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx$$
Fazendo a substituição $u = \ln(x+1)$, obtemos
$$2\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx = 2\int_0^{\ln(2)} u\,du = 2\frac{u^2}{2}\Big|_0^{\ln(2)} = \ln^2(2).$$

(2) Fazendo a substituição $u = x^{1/3}$, temos
$$du = \frac{1}{3}x^{-2/3}dx \quad \Rightarrow \quad dx = 3x^{2/3}du = 3u^2du,$$
de modo que
$$\begin{aligned}\int_1^R \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+x} &= \int_1^{R^{1/3}} \frac{3u^2}{u+u^3}\,du = \frac{3}{2}\int_1^{R^{1/3}} \frac{2u}{1+u^2}\,du \\ &= \frac{3}{2}\ln(1+u^2)\Big|_1^{R^{1/3}} = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{1+R^{2/3}}{2}\right).\end{aligned}$$
Portanto,
$$\int_1^R \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+x} = 1 \iff \frac{3}{2}\ln\left(\frac{1+R^{2/3}}{2}\right) = 1 \iff R = \big(2e^{2/3}-1\big)^{3/2}.$$

2ª Questão: (2.0 pts)

Considere a região $\mathcal{R}_a$ delimitada pelas curvas $f(x) = x^{-2}$ e $g(x) = x^{-3}$, para $x \geq a$.

(a) Determine a área da região $\mathcal{R}_a$ no caso $a = 1$;

(b) Determine o valor de $a > 0$ para que a área de $\mathcal{R}_a$ seja o dobro da obtida no item anterior.

Solução: (a) Como $x^{-2} > x^{-3}$ para todo $x > 1$, a área A da região $\mathcal{R}_1$ é dada por:
$$\begin{aligned}A &= \int_1^{+\infty} (x^{-2} - x^{-3})\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_1^R (x^{-2}-x^{-3})\,dx \\ &= \lim_{R\to+\infty}\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^R = \lim_{R\to+\infty}\left(\frac{1}{2R^2} - \frac{1}{R} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$
(b) Para $0 < x < 1$ temos $x^{-3} > x^{-2}$. Logo, devemos determinar a no intervalo $(0,1)$ tal que
$$\int_a^1 (x^{-3} - x^{-2})\,dx = \frac{1}{2}. \qquad (*)$$

Como

$$\int_a^1 (x^{-3} - x^{-2})\, dx = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a^2}\right),$$

a condição $(*)$ se verifica se, e somente se, $a = 1/2$.

3ª Questão: *Um objeto é esculpido a partir de um tronco cilíndrico de madeira maciça com diâmetro de $2L$ metros e comprimento de 4 metros. O objeto tem a forma do sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela curva $y = L\sqrt{2}/\sqrt{x^2+x}$, $x \in [1,5]$, e pelo eixo x. Calcule o volume de madeira* **desperdiçado**.

Solução: Sejam V_T e V_E respectivamente os volumes do tronco e da escultura. Então, o volume de material desperdiçado é $V = V_T - V_E$. Aplicando o método dos discos cilíndricos, o volume da escultura pode ser calculado por:

$$V_E = \int_1^5 \frac{2\pi L^2}{x^2+x}\, dx.$$

Pelo método de frações parciais, temos:

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Logo, o volume desperdiçado é:

$$\begin{aligned} V &= 4\pi L^2 - 2\pi L^2 \big(\ln|x| - \ln|x+1|\big)\Big|_1^5 \\ &= 4\pi L^2 - 2\pi L^2 \left(\ln\left(\frac{5}{6}\right) + \ln(2)\right) \\ &= 2\pi L^2 \left(2 - \ln\left(\frac{5}{3}\right)\right). \end{aligned}$$

4ª Questão:

Seja $\phi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função derivável e considere

$$F(t) = \int_0^{\phi^2(t)} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx.$$

a) *Se $\phi(1) = \sqrt{\pi/2}$ e $\phi'(1) = 1/2$, calcule $F'(1)$;*

b) *Se $\phi'(t) = 1$ para todo $t \in [0, +\infty)$, calcule*

$$\lim_{t\to+\infty} F'(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 0} F'(t).$$

Solução: Pelos Teorema Fundamental do Cálculo e Regra da Cadeia, temos

$$F'(t) = \frac{\operatorname{sen}\big(\phi^2(t)\big)}{\phi^2(t)} 2\phi(t)\phi'(t).$$

(a) Substituindo os valores, obtemos

$$F'(1) = \frac{\operatorname{sen}(\pi/2)}{\pi/2}\sqrt{\pi/2} = \sqrt{2/\pi}.$$

(b) Se $\phi'(t) = 1$ para todo $t \in [0, +\infty)$, então $\phi(t) = t + C$, para algum $C \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\lim_{t\to+\infty} F'(t) = \lim_{t\to+\infty} 2\frac{\operatorname{sen}\big((t+C)^2\big)}{t+C}.$$

Observe que

$$0 \leq \left|\frac{\operatorname{sen}((t+C)^2)}{t+C}\right| \leq \frac{1}{|t+C|},$$

de onde se conclui pelo Teorema do confronto que

$$\lim_{t\to+\infty} F'(t) = \lim_{t\to+\infty} 2\frac{\operatorname{sen}\big((t+C)^2\big)}{t+C} = 0.$$

Para calcular o limite quando t tende a zero, devemos considerar dois casos: $C = 0$ e $C \neq 0$. No primeiro caso, temos

$$\lim_{t\to 0} F'(t) = \lim_{t\to 0} \frac{2t\operatorname{sen}(t^2)}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t^2)}{t^2} \times \lim_{t\to 0} 2t = 1 \times 0 = 0.$$

No segundo caso,

$$\lim_{t\to 0} F'(t) = \lim_{t\to 0} \frac{2(t+C)\operatorname{sen}((t+C)^2)}{(t+C)^2} = \frac{2\operatorname{sen}(C^2)}{C}.$$