Questão 1: (2.0 pontos)

Calcule as seguintes integrais indefinidas:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^5}dx$

(a) *Primeira resolução:*

Considere a variável $u = 1 + e^x$. Note que $du = e^x\, dx = (u-1)dx$. Assim, reescrevendo a integral em relação à nova variável u, obtemos

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1}{u(u-1)}du.$$

Agora, usando o método de frações parciais, escrevemos:

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} = \frac{A(u-1)+Bu}{u(u-1)}.$$

Portanto,

$$(A+B)u - A = 1,$$

de onde obtemos $A = -1$ e $B = 1$. Assim,

$$\int \frac{1}{u(u-1)}du = \int \left(-\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1}\right)du = -\ln|u| + \ln|u-1| + c$$
$$= \ln\left|\frac{u-1}{u}\right| + c = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) + c.$$

Segunda resolução:

Multiplicando o numerador e o denominador do integrando por e^{-x} e reescrevendo a integral em relação à variável $u = e^{-x} + 1$, obtemos

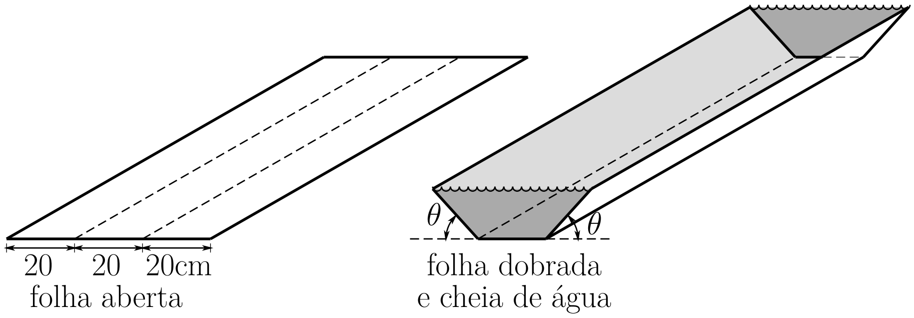
$$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = -\int \frac{1}{u}du = -\ln|u| + c$$
$$= -\ln(e^{-x}+1) + c = \ln\left(\frac{1}{e^{-x}+1}\right) + c = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Considerando variáveis u e v tais que $u = \ln x$ e $dv = \frac{1}{x^5}dx$, obtemos, pelo método de integração por partes, que

$$\int \frac{\ln x}{x^5}dx = -\frac{\ln x}{4x^4} + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^5}dx = -\frac{\ln x}{4x^4} - \frac{1}{16x^4} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Questão 2: (3.0 pontos)

Deseja-se construir uma calha a partir de uma folha de zinco de 60 cm de largura, dobrando-a conforme a ilustração abaixo. Qual deve ser o ângulo θ da dobra, se o objetivo é maximizar o volume de água que a calha poderá comportar?



Solução:

Denotando por l o comprimento da folha, o volume é dado por

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \overbrace{\overbrace{\frac{20\,\text{cm} + (20 + 2\cdot 20\cos\theta)\,\text{cm}}{2}}^{\text{média das bases}}\overbrace{(20\sin\theta\,\text{cm})}^{\text{altura}}}^{\text{área da seção trapezoidal}}\overbrace{l}^{\text{comp.}} \\ &= 400(1+cos\theta)sin\theta\,\text{cm}^2\,l. \end{aligned} \quad (1)$$

O ângulo desejado é dado por,

$$\theta = \arg\min_{\theta\in[0,2\pi/3]} V(\theta).$$

O limite superior de $2\pi/3$ ocorre quando o trapézio se degenera formando um triângulo equilátero (ângulos maiores não são fisicamente possíveis). Como trata-se de uma função contínua definida em um intervalo fechado e limitado, sabemos que existe um máximo absoluto que será um ponto crítico ou um extremo do intervalo.

Pontos críticos:

$$V'(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\sin^2\theta + cos\theta(1+\cos\theta) = 0.$$

Como $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$,

$$2\cos^2\theta + cos\theta - 1 = 2(\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1/2) = 0.$$

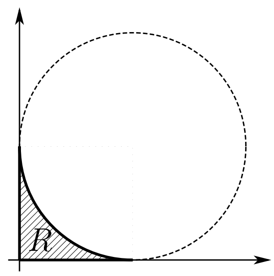
Como $\cos\theta = -1$ não tem solução no intervalo de busca, $\cos\theta = 1/2$ nos dá o único ponto crítico, $\theta = \pi/3$.

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 && \text{(extremo do intervalo)} \\ V(\pi/3) &= 300\sqrt{3}\,\text{cm}^2\,l && \text{(pto. crítico)} \\ V(2\pi/3) &= 100\sqrt{3}\,\text{cm}^2\,l && \text{(extremo do intervalo)} \end{aligned}$$

O volume é maximo quando $\theta = \pi/3$.

Observação sobre a pontuação: modelar a função V, derivar, igualar a zero e fazer as contas para encontrar que $\pi/3$ é o único ponto crítico do intervalo de interesse vale 2,5 dos 3,0 pontos. Os 0,5 restantes são para a discussão da maximalidade de $V(\pi/3)$.

Questão 3: (2.5 pontos)
Seja C o círculo centrado em $(1,1)$ e de raio 1 e seja R a região compreendida entre C e os eixos coordenados, como na figura abaixo:



Determine:

(a) a área da região R;

(b) o volume do sólido de revolução obtido pela rotação de R em torno do eixo x.

Solução:

(a) *Primeira resolução:*
Considere o quadrado

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

Note que a área da região R é dada por

$$\text{Área}(R) = \text{Área}(Q) - \text{Área}(Q \cap C).$$

Como

$$\text{Área}(Q \cap C) = \frac{\text{Área}(C)}{4} = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4},$$

temos então

$$\text{Área}(R) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Segunda resolução: A equação da curva de contorno do círculo C, isto é, da circunferência de centro $(1,1)$ e raio 1, é dada por

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Isolando a variável y na equação acima, obtemos:

$$y = 1 \pm \sqrt{1-(x-1)^2}.$$

Mas se $0 \leq y \leq 1$, então

$$y = 1 - \sqrt{1-(x-1)^2}.$$

Note que R é a região limitada pela curva $y = 1 - \sqrt{1-(x-1)^2}$ e pelos eixos x e y. Portanto,

$$\text{Área}(R) = \int_0^1 (1 - \sqrt{1-(x-1)^2})\mathrm{d}x = 1 - \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x.$$

Considerando uma nova variável θ tal que $x-1=\operatorname{sen}\theta$, reescrevemos:

$$\text{Área}(R) = 1 - \int_{-\pi/2}^{0} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}\cos\theta \mathrm{d}\theta = 1 - \int_{-\pi/2}^{0} \cos^2\theta \mathrm{d}\theta$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{0} (1+\cos(2\theta))\mathrm{d}\theta = 1 - \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right]_{-\pi/2}^{0} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

(b) Sabemos que R é a região limitada pela curva $y = 1-\sqrt{1-(x-1)^2}$ e pelos eixos x e y. Assim, pelo método das seções transversais, o volume V do sólido de revolução gerado pela rotação de R em torno do eixo x será dado por

$$V = \int_0^1 \pi(1-\sqrt{1-(x-1)^2})^2\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 (1+2x-x^2-2\sqrt{1-(x-1)^2})\mathrm{d}x =$$
$$\pi\left[x+x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - 2\pi\int_{-\pi/2}^{0}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = \pi\left(1+1-\frac{1}{3}\right) - 2\pi\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{3} - \frac{\pi^2}{2},$$

onde na segunda linha utilizamos a mesma mudança de variáveis do item anterior.

Questão 4: (2.5 pontos)
Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^{2x} \sqrt{\mathrm{e}^{2t}+2\,\mathrm{e}^{t}}\mathrm{d}t.$$

(a) Calcule $f'(x)$.

(b) Determine o comprimento de arco da curva $y=f(x)$, $x\in[1,2]$.

(a) Pela regra da cadeia, temos que

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}^{2\cdot 2x}+2\,\mathrm{e}^{2x}}\cdot(2x)' = \sqrt{\mathrm{e}^{4x}+2\,\mathrm{e}^{2x}}.$$

(b) O comprimento de arco L da curva $y=f(x)$, $x\in[1,2]$, é dado por

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x = \int_1^2 \sqrt{1+\mathrm{e}^{4x}+2\,\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x = \int_1^2 \sqrt{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2}\mathrm{d}x$$
$$= \int_1^2 (\mathrm{e}^{2x}+1)\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}+x\right]_1^2 = \left(\frac{\mathrm{e}^4}{2}+2\right) - \left(\frac{\mathrm{e}^2}{2}+1\right) = \frac{\mathrm{e}^4-\mathrm{e}^2}{2}+1.$$