Universidade Federal do Rio de Janeiro
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Gabarito da Segunda Prova Unificada de Cálculo 1 - 2013/2

Engenharia e Engenharia Química

26/11/2013

1ª Questão: (2,0 pts) *Calcule as integrais abaixo:*

$$(1a)\quad \int x^2 \sin(x)\,dx, \quad (1b)\quad \int_1^2 (x+3)(x-1)^{25}\,dx$$

$$(1c)\quad \int \frac{x^2+3}{x^4-1}dx, \quad (1d)\quad \int \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}dx.$$

Solução: (1a) Considerando $f(x) = x^2$ e $g'(x) = \text{sen}(x)$, obtemos da integração por partes:

$$\int x^2 \sin(x)\,dx = -x^2\cos(x) + \int 2x\cos(x)\,dx.$$

Repetindo o argumento com $f(x) = 2x$ e $g'(x) = \cos(x)$, obtemos

$$\int 2x\cos(x)\,dx = 2x\,\text{sen}(x) - 2\int \text{sen}(x)\,dx = 2x\,\text{sen}(x) + 2\cos(x) + C.$$

Portanto,

$$\int x^2\sin(x)\,dx = -x^2\cos(x) + 2x\,\text{sen}(x) + 2\cos(x) + C.$$

(1b) Fazendo a substituição $u = x-1$, obtemos $x = u+1$ e $dx = du$. Logo

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x+3)(x-1)^{25}\,dx &= \int_0^1 (u+4)u^{25}du = \int_0^1 (u^{26}+4u^{25})\,du \\ &= \frac{u^{27}}{27} + 4\frac{u^{26}}{26}\Big]_0^1 = \frac{1}{27} + \frac{2}{13} = \frac{67}{351}.\end{aligned}$$

(1c) A equação $x^4 - 1 = 0$ possui duas raízes reais, $x = 1$ e $x = -1$, e duas raízes imaginárias. Logo, temos a fatoração $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$.

Pelo método das frações parciais, existem constantes reais A, B, C e D tais que

$$\frac{x^2+3}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Efetuando a soma na identidade acima, obtemos

$$\frac{x^2+3}{x^4-1} = \frac{(A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D)}{x^4-1}.$$

Identificando os numeradores, obtemos o sistema

$$\begin{cases} A+B+C=0 & (i) \\ A-B+D=1 & (ii) \\ A+B-C=0 & (iii) \\ A-B-D=3 & (iv) \end{cases}$$

Observe que $(i)-(iii) \quad \Rightarrow \quad C=0$ e $(ii)-(iv) \quad \Rightarrow \quad D=-1$. Então

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=2 \end{cases}$$

de onde se deduz que $A=1$ e $B=-1$. Então,

$$\frac{x^2+3}{x^4-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+1}$$

e

$$\int \frac{x^2+3}{x^4-1}\,dx = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \arctan(x) + C.$$

(1d) Fazendo inicialmente a substituição $u = x^2$, obtemos

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}dx = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Agora, fazenso a substituição trigonométrica $u = \tan(\theta)$, obtemos,

$$du = \sec^2(\theta) \quad \text{e} \quad \sqrt{1+u^2} = \sec(\theta).$$

Então,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}dx &= \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \sec(\theta)\,d\theta \\ &= \ln|\tan(\theta)+\sec(\theta)| + C = \ln\big(x^2+\sqrt{1+x^4}\big) + C. \end{aligned}$$

2ª Questão: (2,0 pts) *Considere a região R do plano xy delimitada pela curva de quação $y = x^3 - x^4$ e pela reta $y = 0$ (eixo x).*

(a) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno da reta $y = 0$ (eixo x);

(b) Escreva uma integral que corresponda ao volume do sólido gerado pela rotação de R em torno da reta $x = 2$. Não precisa calcular a integral.

Solução: (a) Pelo método dos discos:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi(x^3-x^4)^2dx = \pi\int_0^1 (x^6-2x^7+x^8)\,dx \\ &= \pi\left[\frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^9}{9}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right) = \frac{\pi}{252}. \end{aligned}$$

(b) Pelo método das cascas cilíndricas:

$$V = \int_0^1 2\pi(2-x)(x^3 - x^4)\, dx$$

3ª Questão: (2,0 pts) *Calcule o comprimento de arco da curva $y = \ln(\sec(\theta))$ entre os pontos $\theta = 0$ e $\theta = \pi/3$.*

Solução: Se $y = \ln\big(\sec(\theta)\big)$, então

$$\frac{du}{dx} = \tan(\theta).$$

Logo, o comprimento da curva é:

$$l = \int_0^{\pi/3} \sqrt{1+\tan^2(\theta)}\, d\theta = \int_0^{\pi/3} \sec(\theta)\, d\theta = \ln\big[\tan(\theta)+\sec(\theta)\big]_0^{\pi/3} = \ln(\sqrt{3}+2).$$

4ª Questão: (2,0 pts) *Considere as funções:*

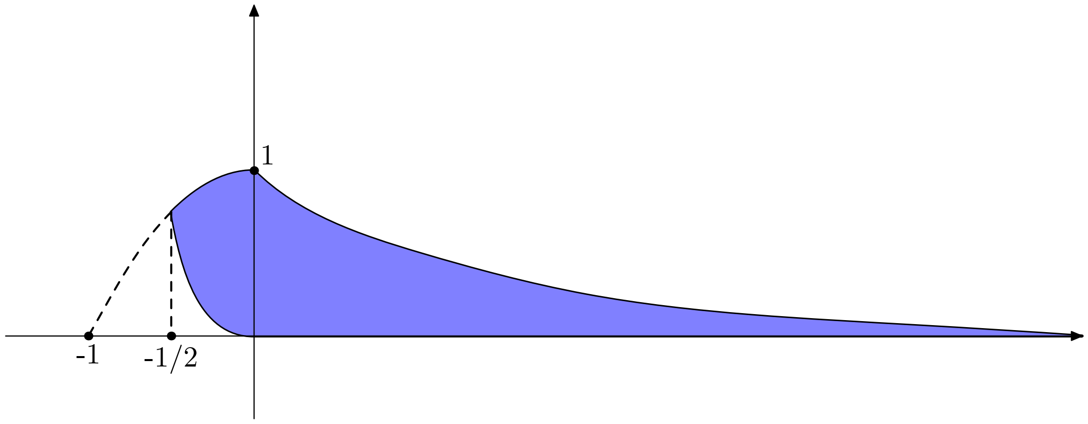
$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \textit{se } x \leq 0 \\ e^{-x}, & \textit{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 3x^2, & \textit{se } x \leq 0 \\ 0, & \textit{se } x > 0 \end{cases}$$

e seja R a região ilimitada definida por $R = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\, ;\, g(x) \leq y \leq f(x)\big\}$.

(a) Faça um esboço de R;

(b) Calcule a área de R.

Solução: (a)



(b)

$$A = \int_{-1/2}^{0} (1-4x^2)\, dx + \int_0^{\infty} e^{-x} dx.$$

Calculando as integrais:

$$\int_{-1/2}^{0} (1 - 4x^2)\, dx = \left[x - \frac{4x^3}{3} \right]_{-1/2}^{0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} e^{-x} dx = \lim_{b \to +\infty} \left[1 - e^{-b} \right] = 1.$$

Logo $A = 4/3$.

5ª Questão: (2,0 pts) Sejam f e g funções contínuas em $\mathbb{R}$ tais que:

$$\int_{-2}^{1} f(x)\, dx = 3, \qquad \int_{-2}^{1} g(x)\, dx = 2 \quad \text{e} \quad \int_{-2}^{0} f(x)\, dx = 5.$$

(a) Calcule

$$\int_{-2}^{1} \big[f(x) + 3g(x) \big]\, dx \quad \text{e} \quad \int_{0}^{1} f(x)\, dx.$$

(b) Calcule $G(1)$ e $G'(x)$, sendo G definida por

$$G(x) = \int_{0}^{x^2} f(t)\, dt.$$

Solução: (a) Pela propriedade linear da integral, temos

$$\int_{-2}^{1} \big[f(x) + 3g(x) \big]\, dx = \int_{-2}^{1} f(x)\, dx + 3 \int_{-2}^{1} g(x)\, dx = 3 + 3 \times 2 = 9.$$

Além disso, como

$$\int_{-2}^{1} f(x)\, dx = \int_{-2}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{1} f(x)\, dx,$$

obtemos

$$\int_{0}^{1} f(x)\, dx = \int_{-2}^{1} f(x)\, dx - \int_{-2}^{0} f(x)\, dx = 3 - 5 = -2.$$

(b) Pelo item (a), é claro que $G(1) = \int_0^1 f(t)\, dt = -2$.
Sabemos do Teorema Fundamental do Cálculo que F definida por

$$F(x) = \int_{0}^{x} f(t)\, dt$$

é uma primitiva de f, isto é, $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Então, como $G(x) = F(x^2)$, segue da Regra da Cadeia que

$$G'(x) = F'(x^2) \times 2x = 2x f(x^2).$$