Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral I - MAC118
Gabarito segunda prova - Escola Politécnica / Escola de Química - 09/07/2013

Questão 1: (2 pontos)
As margens de cima e de baixo de um pôster têm 6 cm e as margens laterais medem 4 cm cada. Se a área do material impresso sobre o pôster estiver fixa em 384 cm^2, encontre as dimensões do pôster com a menor área. Justifique.

Solução:
Sejam x cm a largura (medida horizontal) e y cm a altura (medida vertical) do pôster. As medidas da região impressa são, portanto, $(x-8)$ cm e $(y-12)$ cm. Temos, por hipótese,

$$(x-8)(y-12) = 384.$$

A área do pôster é xy cm^2. Da hipótese segue que

$$y = \frac{384}{x-8} + 12,$$

donde queremos minimizar

$$A(x) = \frac{384}{x-8}x + 12x \equiv \frac{8 \cdot 384}{(x-8)} + 12x + 384.$$

Aqui, temos que ter $x > 8$ e $y > 12$, logo $8 < x < \infty$. Calculemos a derivada de A:

$$A'(x) = -\frac{8 \cdot 384}{(x-8)^2} + 12, \quad \text{assim} \quad A'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 24.$$

Ainda, $A''(x) = \frac{2 \cdot 8 \cdot 384}{(x-8)^3} \geq 0$, para $x > 8$. Portanto o gráfico de $z = A(x)$ tem concavidade para cima para todo $x > 8$; em particular $x = 24$ é ponto de mínimo (pelo Teste da 2a. Derivada) e é um mínimo global pois:

$$\lim_{x \to 8^+} A(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} A(x) = +\infty, \quad \text{e} \quad x = 24 \ \text{ é } \ \text{o único ponto crítico.}$$

As dimensões requeridas são, portanto, $x = 24$ cm e $y = 36$ cm .

Questão 2: (4 pontos)
Calcule as integrais abaixo. Justifique as respostas.

(i) $\displaystyle\int x\cos(x^2)\,dx\,.$ **(ii)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx\,.$

(iii) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-6x-16}\,dx\,.$ **(iv)** $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,.$

Solução:

(i) Usamos a substituição $u = x^2$ que implica $du = 2xdx$. Portanto,

$$\int x\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(u)\,du = \frac{1}{2}\text{sen}\,(u) + C = \frac{1}{2}\text{sen}\,(x^2) + C\,.$$

(ii) Seja $A > 1$, integramos por partes para calcular $\int_1^A \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ fazendo $u(x) = \ln(x) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$ e $v(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x^2}$:

$$\int_1^A \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(x)}{x}\Big|_1^A + \int_1^A \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(x)}{x}\Big|_1^A - \frac{1}{x}\Big|_1^A = 1 - \frac{\ln A}{A} - \frac{1}{A}.$$

Agora, usamos a regra de l'Hôpital para calcular

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\Big(1 - \frac{\ln A}{A} - \frac{1}{A}\Big) = 1 - \lim_{A\to+\infty}\Big(\frac{1/A}{-1/A^2}\Big) = 1.$$

(iii) Decompomos a função racional $\frac{x-3}{x^2-6x-16}$ em frações parciais:

$$\frac{x-3}{x^2-6x-16} = \frac{\alpha}{x+2} + \frac{\beta}{x-8} \quad \text{com} \quad \alpha = \frac{x-3}{x-8}\Big|_{x=-2} = \frac{1}{2} \text{ e } \beta = \frac{x-3}{x+2}\Big|_{x=8} = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\int \frac{x-3}{x^2-6x-16}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-8}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-6x-16\right| + C.$$

(iv) Usamos a substituição trigonométrica $x = \sec\theta$ que implica

$$dx = \tan\theta\sec\theta\,d\theta \quad \text{e} \quad \sqrt{x^2-1} = |\tan\theta| = \tan\theta, \text{ já que } x = \sec\theta \in [\sqrt{2},2] \Rightarrow \theta \in [\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}].$$

Portanto,

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \Big(1+\cos(2\theta)\Big)\,d\theta = \frac{1}{2}\Big(\theta+\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\Big)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi+3\sqrt{3}-6}{24}.$$

Questão 3: (2 pontos)
Seja D a região situada entre as curvas $y = \frac{1}{12}$, $x = 1$, $x = \sqrt{3}$ e $y = \frac{1}{x+x^3}$. Calcule o volume do sólido S obtido fazendo girar a região D em torno do eixo **y**.

Solução:
Seja $f(x) = \frac{1}{x+x^3}$. Então f tem derivada $f'(x) = -\frac{3x^2+1}{(x^3+x)^2} \le 0$ para $x \ge 0$. Logo f é decrescente no intervalo $[1,\sqrt{3}]$. Como $f(\sqrt{3}) = \frac{1}{4\sqrt{3}} > \frac{1}{12}$, deduzimos que a o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x+x^3}$ sempre está acima da reta $y = \frac{1}{12}$. Portanto, usando a fórmula de cálculo de volume por cascas cilíndricas, obtemos que o volume de S é dado por

$$2\pi\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx - \frac{2\pi}{12}\int_1^{\sqrt{3}} x\,dx = 2\pi\arctan(x)\Big|_1^{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{12}x^2\Big|_1^{\sqrt{3}} = 2\pi(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi^2-\pi}{6}.$$

Questão 4: (2 pontos)

(**a**) Dê o domínio e calcule a derivada da função f, onde

$$f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^t}{t^2+1}\,dt.$$

(**b**) Calcule o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x (1+\text{sen}t)^{2013}\,dt}{3x}.$$

Solução:

(a) O domínio de $f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^t}{t^2+1}\,dt$ coincide com o domínio da função $g(x) = \sqrt{x}$, que é $[0, +\infty)$.

Uma vez que $h(t) = \frac{e^t}{t^2+1}$ é continua, usando a Regra da Cadeia e o Teroema Fundamental do Cálculo, obtemos para todo $x \geq 0$ que

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^t}{t^2+1}\,dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\int_1^{u} \frac{e^t}{t^2+1}\,dt\right) = \frac{d}{du}\left(\int_1^{u} \frac{e^t}{t^2+1}\,dt\right)\frac{du}{dx} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(x+1)},$$

onde $u = \sqrt{x}$.

(b) Como $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^x (1+\text{sen}t)^{2013}\,dt = 0$, ao tentar resolver o limite $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (1+\text{sen}t)^{2013}\,dt}{3x}$, encontramos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Uma vez que $f(t) = (1+\text{sen}t)^{2013}$ é contínua, aplicando a Regra de L'Hôspital e o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (1+\text{sen}t)^{2013}\,dt}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(\int_0^x (1+\text{sen}t)^{2013}\,dt\right)}{\frac{d}{dx}(3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+\text{sen}x)^{2013}}{3} = \frac{1}{3}.$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

Duração da prova: duas horas e meia