UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Matemática
SEGUNDA PROVA UNIFICADA – CÁLCULO I
POLITÉCNICA E ENGENHARIA QUÍMICA 19/02/2013.

GABARITO

1ª Questão. (*3.0 pontos*).

Calcule as integrais abaixo.

(a) $\displaystyle\int e^x \cos(e^x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 (\ln x)^2\,dx$

(c) $\displaystyle\int \cos x \cos^2(3x)\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{\ln(x^3+1)}{x^3}\,dx$

- **Solução.**

(a) Usando a substituição $u = e^x$, com $du = e^x\,dx$, obtemos que

$$\begin{aligned}\int e^x \cos(e^x)\,dx &= \int \cos(u)\,du \\ &= \text{sen}\,(u) + c = \text{sen}\,(e^x) + c.\end{aligned}$$

(b) Como a integral é imprópria, temos que

$$\int_0^1 (\ln x)^2\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 (\ln x)^2\,dx.$$

Integrando por partes duas vezes, obtemos que

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 (\ln x)^2\,dx &= \lim_{a\to 0^+} \left(\left[x\,(\ln x)^2 \Big|_a^1 - 2\int_a^1 \ln x\,dx \right) \\ &= \lim_{a\to 0^+} \left(\left[x\,(\ln x)^2 \Big|_a^1 - 2\Big(\left[x \ln x \Big|_a^1 - \int_a^1 dx \Big) \right) \\ &= \lim_{a\to 0^+} \left[x\,(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) \Big|_a^1 \right. \\ &= 2 - \lim_{a\to 0^+} \big(a\,(\ln a)^2 - 2(a \ln a - a) \big)\end{aligned}$$

Os limites acima devem ser calculados utilizando a regra de L'Hospital. Temos que

$$\lim_{a\to 0^+} a\,(\ln a) = \lim_{a\to 0^+} \frac{(\ln a)}{1/a} = \lim_{a\to 0^+} \frac{1/a}{-1/a^2} = 0,$$

e

$$\lim_{a\to 0^+} a\,(\ln a)^2 = \lim_{a\to 0^+} \frac{(\ln a)^2}{1/a} = \lim_{a\to 0^+} \frac{2(\ln a)(1/a)}{-1/a^2} = -2 \lim_{a\to 0^+} a\,(\ln a) = 0.$$

Portanto,

$$\int_0^1 (\ln x)^2\,dx = 2.$$

(c) Usando a identidade $\cos^2(3x) = (1 + \cos 6x)/2$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int \cos x \cos^2(3x)\, dx &= \int \cos x \left(\frac{1+\cos(6x)}{2} \right) dx = \frac{1}{2}\left[\int \cos x\, dx + \int \cos x \cos(6x)\, dx \right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \int \big(\cos(-5x) + \cos(7x) \big)\, dx \right] \\
&= \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(5x)}{20} + \frac{\operatorname{sen}(7x)}{28} + C.
\end{aligned}$$

(d) Integrando por partes, temos que

$$\int \frac{\ln(x^3+1)}{x^3}\, dx = \frac{-\ln|x^3+1|}{2x^2} + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^3+1}\, dx$$

Integrando por frações parcias, obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}\int \frac{1}{x^3+1}\, dx &= \frac{3}{2}\int \frac{1}{3(x+1)}\, dx + \frac{3}{2}\int \frac{2-x}{3(x^2-x+1)}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{2-x}{x^2-x+1}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{3}{2(x^2-x+1)}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{2(x^2-x+1)}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x^2-x+1}\, dx - \frac{1}{4}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\, dx
\end{aligned}$$

Por um lado, fazemos a substituição $u = x^2 - x + 1$, com $du = (2x-1)dx$, e obtemos que

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\, dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|x^2-x+1| + c$$

Por outro, completando o quadrado e fazendo a substituição $v = x - 1/2$, com $dv = du$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-x+1}\, dx &= \int \frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}\, dx = \int \frac{1}{v^2+3/4}\, dv \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} v \right) + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + c
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \frac{\ln(x^3+1)}{x^3}\, dx = \frac{-\ln|x^3+1|}{2x^2} + \frac{\ln|x+1|}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{4}\ln|x^2-x+1| + c.$$

2ª Questão. (*2.5 pontos*).

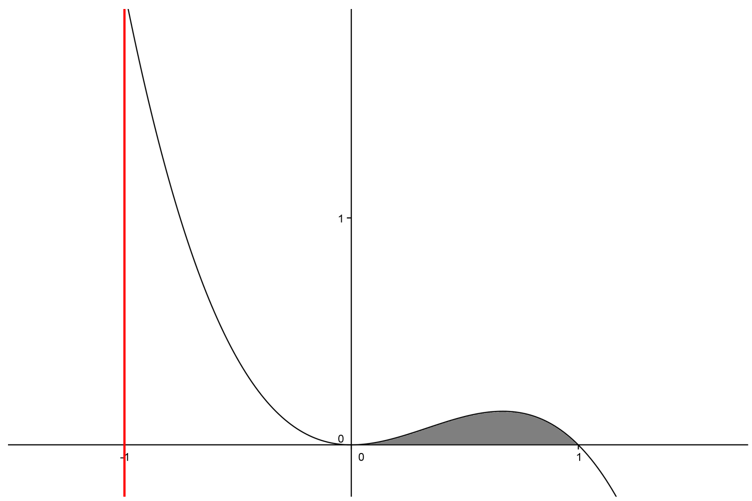
Encontre o volume gerado pela rotação da região limitada

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 \leq y \leq x^2 - x^3\right\}$$

em torno da reta $x = -1$.

- **Solução.**

Se $f(x) = x^2 - x^3 = x^2(1-x)$ então $f'(x) = 2x - 3x^2 = x(2-3x)$ e $f''(x) = 2 - 6x$. Logo, a região que será rotacionada ao redor da reta $x = -1$ será como na figura:



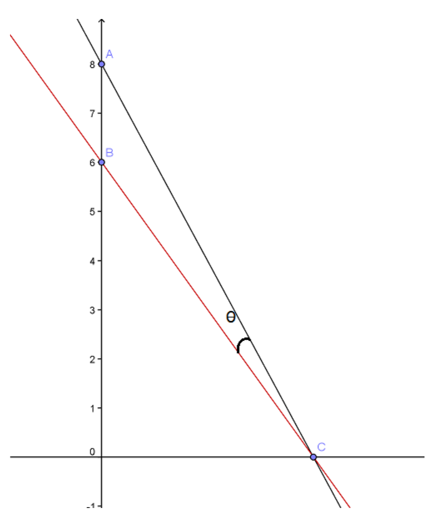
Observe que o raio da casca cilíndrica será $1+x$, circunferência $2\pi(1+x)$ e altura $x^2 - x^3$. Logo o volume do solido será:

$$V = \int_0^1 2\pi(1+x)(x^2 - x^3)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = \frac{4}{15}\pi.$$

3ª Questão. (*2.5 pontos*).

Seja $x > 0$. Considere o triângulo com vértices em $A = (0,8)$, $B = (0,6)$ e $C = (x,0)$. Ache o valor de x que *maximize* o ângulo entre $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

- **Solução.**



Temos que

$$\operatorname{tg}(\alpha+\theta) = \frac{2+6}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha+\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{8}{x}\right)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{6}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{6}{x}\right)$$

Logo,

$$\theta(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{8}{x}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{6}{x}\right), \qquad \text{para todo } x \in (0, +\infty).$$

Assim, $\theta(x)$ é contínua e diferenciável para todo $x \in (0, +\infty)$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\theta'(x) &= \frac{1}{1+(8/x)^2}\left(-\frac{8}{x^2}\right) - \frac{1}{1+(6/x)^2}\left(-\frac{6}{x^2}\right) \\
&= \frac{1}{\frac{x^2+8^2}{x^2}}\left(-\frac{8}{x^2}\right) - \frac{1}{\frac{x^2+6^2}{x^2}}\left(-\frac{6}{x^2}\right) \\
&= \frac{-8}{x^2+8^2} + \frac{6}{x^2+6^2} \quad = \quad \frac{-8\left(x^2+6^2\right)+6\left(x^2+8^2\right)}{(x^2+8^2)(x^2+6^2)} \\
&= \frac{2\left(-x^2+48\right)}{(x^2+8^2)(x^2+6^2)} = 0
\end{aligned}$$

Portanto,

$$-x^2+48 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 4\sqrt{3}, \quad \text{pois } x > 0.$$

Analisando o sinal de θ', obtemos que

$$\theta'(x) > 0, \quad \text{para } 0 < x < 4/\sqrt{3}, \qquad \text{e} \qquad \theta'(x) < 0, \quad \text{para } x > 4/\sqrt{3}.$$

Além disso,

$$\lim_{x\to 0^+} \theta(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\infty} \theta(x) = 0.$$

Logo, o ângulo entre $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ atinge seu máximo absoluto quando $x = 4/\sqrt{3}$.

4ª Questão. (*2.0 pontos*).

Considere a região infinita $\mathcal{R}$ limitada pela curva

$$y = \frac{e^{-x^2}}{(x^2+1)^2}, \; -\infty < x < \infty,$$

e pelo eixo x. Escreva uma integral que represente a área de $\mathcal{R}$ e determine, sem calcular a integral, se essa região tem a área finita ou infinita. Justifique sua resposta.

- **Solução.** A integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}\,dx}{(x^2+1)^2}$$

representa a área de $\mathcal{R}$.

Como a função $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{(x^2+1)^2}$ é par, temos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}\,dx}{(x^2+1)^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Para analisar a convergência, escrevemos

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_0^{1} \frac{e^{-x^2}}{(x^2+1)^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Na primeira integral temos que

$$\frac{e^{-x^2}}{(x^2+1)^2} \le 1, \quad \text{para todo } 0 \le x \le 1,$$

e na segunda usamos o fato que

$$\frac{e^{-x^2}}{(x^2+1)^2} \le \frac{1}{x^4}, \quad \text{para todo } x \ge 1.$$

Logo, como a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\[2ex] \dfrac{1}{x^4}, & x \ge 1, \end{cases}$$

é integrável, segue do teorema de comparação que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x^2+1)^2}\,dx < \infty.$$