Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática - Departamento de Métodos Matemáticos

SEGUNDA PROVA UNIFICADA de CÁLCULO I – 19/06/2012

Escola Politécnica e Escola de Química

Questão 1. Seja ℓ uma reta passando pelo ponto $(1,1)$ com inclinação negativa. Dentre todos os triângulos retângulos ABC obtidos tomando $A=(0,0)$ e $\overline{BC}$ a interseção da reta ℓ com o primeiro quadrante, encontre as dimensões do que possui a menor hipotenusa.

Resolução. Sejam $(x,0)$ e $(0,y)$ os interceptos da reta ℓ com os eixo-x e eixo-y, respectivamente. Seja m o coeficiente angular da reta ℓ. Como ℓ passa pelos pontos $(x,0)$ e $(1,1)$, temos que $m=\frac{1}{1-x}$. No outro lado, como ℓ passa pelos pontos $(x,0)$ e $(0,y)$, temos que $m=\frac{y}{-x}$. Logo, temos a seguinte relação:

$$y=\frac{x}{x-1}.$$

Queremos minimizar o comprimento da hipotenusa:

$$h=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(\frac{x}{x-1})^2},\ \text{com } x\in(1,\infty)$$

Derivando h em relação à x obtemos:

$$h'=\Big(x^2+\Big(\frac{x}{x-1}\Big)^2\Big)^{-\frac{1}{2}}x\Big(1-\frac{1}{(x-1)^3}\Big).$$

Assim, os pontos críticos de h são $x=1$ ou $x=2$. Estudando o sinal de h', vemos que $h'(x)<0$ para $x\in(1,2)$ e $h'(x)>0$ para $x\in(2,\infty)$. Logo, pelo teste da derivada primeira, temos que h possui um mínimo absoluto em $x=2$. Assim, as dimensões do triângulo com a hipotenusa de menor dimensão são

$$x=2,\ y=2\ \text{ e }\ h=2\sqrt{2}.$$

Questão 2.
Seja $\mathfrak{R}$ a região limitada entre $y=x^2-x$ e o eixo-x. Encontre a equação da reta que passa pela origem e que divide $\mathfrak{R}$ em duas subregiões com áreas iguais.

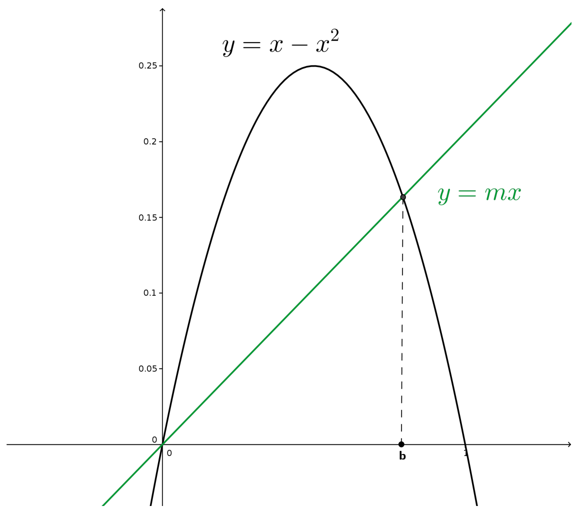
Resolução 1.

A área total entre a parábola $y=x-x^2$ e o eixo-x é dada por:

$$\int_0^1 (x-x^2)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

Seja m a inclinação da reta. Então a área entre a parábola e a reta é dada por

$$\int_0^b \big[(x-x^2)-mx\big]\,dx$$



onde b é a coordenada no eixo-x do ponto de interseção entre a reta e a parábola. O ponto de interseção é obtido resolvendo a seguinte equação:

$$\begin{aligned} x - x^2 &= mx \\ (1-x)x &= mx \\ 1 - x &= m \\ x &= 1 - m \end{aligned}$$

Portanto, $b = 1 - m$, logo:

$$\begin{aligned} \int_0^b \left[(x - x^2) - mx\right] dx &= \int_0^{1-m} \left[(x - x^2) - mx\right] dx \\ &= \int_0^{1-m} \left[(1-m)x - x^2\right] dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(1-m)x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{1-m} \\ &= \frac{1}{2}(1-m)(1-m)^2 - \frac{1}{3}(1-m)^3 \\ &= \frac{1}{6}(1-m)^3. \end{aligned}$$

Por hipótese, temos

$$\int_0^b \left[(x - x^2) - mx\right] dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 x - x^2 dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}.$$

Então, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}(1-m)^3 &= \frac{1}{12}\\
(1-m)^3 &= \frac{1}{2}\\
1-m &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\\
m &= 1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}
\end{aligned}$$

Resolução 2. Usando que o ponto $x = 1-m$ é a interseção entre a parábola $y = x - x^2$ e a reta $y = mx$, temos que verificar o seguinte:

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-m} \left[(x-x^2)-mx\right] dx &= \int_0^{1-m} mxdx + \int_{1-m}^{1} x - x^2 dx\\
&= \left[m\frac{1}{2}x^2\right]_0^{1-m} + \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{1-m}^{1}\\
&= \frac{1}{2}m(1-m)^2 + \left[x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x\right)\right]_{1-m}^{1}\\
&= \frac{1}{2}m(1-m)^2 + \frac{1}{6} - \left[(1-m)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}(1-m)\right)\right].
\end{aligned}$$

Mas, usando que

$$\int_0^{1-m} \left[(x-x^2)-mx\right] dx = \frac{1}{6}(1-m)^3,$$

temos o seguinte:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{6}(1-m)^3 &= \frac{1}{2}m(1-m)^2 + \frac{1}{6} - \left[(1-m)^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}(1-m)\right)\right] \\
\frac{1}{6}(1-m)^3 - \frac{1}{6} &= \frac{1}{2}m(1-m)^2 - \left[(1-m)^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}(1-m)\right)\right] \\
\frac{1}{6}(1-m)^3 - \frac{1}{6} &= (1-m)^2\left[\frac{1}{2}m - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}(1-m)\right)\right] \\
\frac{1}{6}(1-m)^3 - \frac{1}{6} &= (1-m)^2\left[\frac{1}{6}m - \frac{1}{6}\right] \\
\frac{1}{6}(1-m)^3 - \frac{1}{6} &= (1-m)^2\left[\frac{1}{6}(m-1)\right] \\
-\frac{1}{6}(1-m)^3 + \frac{1}{6} &= (1-m)^2\left[\frac{1}{6}(1-m)\right] \\
-\frac{1}{6}(1-m)^3 + \frac{1}{6} &= \frac{1}{6}(1-m)^3 \\
2\frac{1}{6}(1-m)^3 &= \frac{1}{6} \\
(1-m)^3 &= \frac{1}{2} \\
1-m &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\
m &= 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}
\end{aligned}
$$

<u>Questão 3</u>. Resolva as integrais indefinidas abaixo:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{5e^{2x}}{(e^{2x}+1)(2e^x+1)}\,dx$

Solução do Item (a). Considere a mudança de variável $y = x^2$. Usando que $dy = 2xdx$ temos que $x^3dx = x^2(x\,dx) = \frac{1}{2}ydy$. Assim temos

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{y}{\sqrt{4-y}}\,dy.$$

A última integral pode ser resolvida por integração por partes: $u = y$, donde $du = dy$, e $dv = (4-y)^{-\frac{1}{2}}dy$, donde $v = -2\sqrt{4-y}$. Assim,

$$\int \frac{y}{\sqrt{4-y}}\,dy = -2y\sqrt{4-y} + 2\int \sqrt{4-y}\,dy = -2y\sqrt{4-y} - \frac{4}{3}\sqrt{(4-y)^3} + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}.$$

Portanto, segue-se que:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -x^2\sqrt{4-x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(4-x^2)^3} + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}.$$

Solução do Item (b). Considere a mudança de variáveis: $y = e^x$, donde $dy = e^x dx$. Usando que $y\,dy = e^{2x}dx$ temos o seguinte.

$$\int \frac{5e^{2x}}{(e^{2x}+1)(2e^x+1)}\,dx = \int \frac{5y}{(y^2+1)(2y+1)}\,dy.$$

A última integral pode ser resolvida por frações parciais. Escrevamos

$$\begin{aligned} \frac{5y}{(y^2+1)(2y+1)} &= \frac{Ay+B}{y^2+1} + \frac{C}{2y+1} = \frac{(2y+1)(Ay+B)+C(y^2+1)}{(y^2+1)(2y+1)} \\ &= \frac{(2A+C)y^2+(A+2B)y+(B+C)}{(y^2+1)(2y+1)}, \end{aligned}$$

donde, por igualdade de polinômios, temos que resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2A+C=0 \\ A+2B=5 \\ B+C=0 \end{cases}$$

Assim temos $A=1$, $B=2$ e $C=-2$. Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{y}{(y^2+1)(2y+1)}\,dy &= \int \frac{2y}{y^2+1}\,dy + \int \frac{1}{y^2+1}\,dy + \int \frac{-2}{2y+1}\,dy \\ &= \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + 2\text{arctan}(y) - \ln|2y+1| + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \frac{5e^{2x}}{(e^{2x}+1)(2e^x+1)}\,dx = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + 2\text{arctan}(e^x) - \ln|2e^x+1| + C, \text{ com } C \in \mathbb{R}.$$

Questão 4. Seja $\mathfrak{S}$ a região ilimitada no plano xy definida por

$$\mathfrak{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid 0 \le x \le \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}},\ y \ge 0\}.$$

Ache o volume do sólido de revolução obtido girando $\mathfrak{S}$ em torno do **eixo-x**.

Resolução 1 (calculando o volume por seções transversais). Considere a função

$$x(y) = \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ com } y \in (-\infty,\infty). \tag{1}$$

A função $x(y)$ é par (isto é: $x(y) = x(-y)$, para todo y), é decrescente em $[0,\infty)$ e a imagem de x em $[0,\infty)$ satisfaz $x([0,\infty)) = (0,1]$. Assim, a restrição $x(y)$, com $y \ge 0$, admite uma função inversa $y = y(x) \ge 0$, com $x \in (0,1]$.
O volume do sólido gerado pela rotação da curva $x = x(y)$ em torno do eixo x é dado (usando o método das seções transversais) pela seguinte integral:

$$V = \int_0^1 \pi y^2 dx.$$

A função $(y(x))^2$ é facilmente calculada isolando y na equação (1) e é dada por:

$$(y(x))^2 = x^{-\frac{2}{3}} - 1.$$

Logo, o volume V é dado pela seguinte integral imprópria:

$$V = \pi \int_0^1 (x^{-\frac{2}{3}} - 1)dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_\epsilon^1 (x^{-\frac{2}{3}} - 1)dx.$$

Calculando-se esta integral temos:

$$V = \lim_{\epsilon \to 0+} \pi(3\,x^{\frac{1}{3}} - x)\Big|_\epsilon^1 = 2\pi.$$

Resolução 2 (calculando o volume pelo método das cascas cilíndricas). Como a curva dada pela equação

$$x(y) = \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ com } y \geq 0,$$

é um gráfico sobre o semieixo $y \geq 0$, pelo método das cascas cilíndricas, temos que o volume do sólido gerado pela rotação da região R em torno do eixo x é dado por:

$$V = \int_0^\infty 2\pi\, y\, x(y) dy = 2\pi \int_0^\infty \frac{y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} dy = 2\pi \lim_{A \to \infty} \int_0^A \frac{y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} dy.$$

Usando a mudança de variável: $u = 1 + y^2$, temos que

$$\int_0^A \frac{y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} dy = \frac{1}{2} \int_1^{1+A^2} u^{-\frac{3}{2}} du = -u^{-\frac{1}{2}}\Big|_1^{1+A^2} = -\frac{1}{\sqrt{1+A^2}} + 1.$$

Portanto,

$$V = 2\pi \lim_{A \to \infty} \int_0^A \frac{y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} dy = 2\pi \lim_{A \to \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+A^2}}\right) = 2\pi.$$