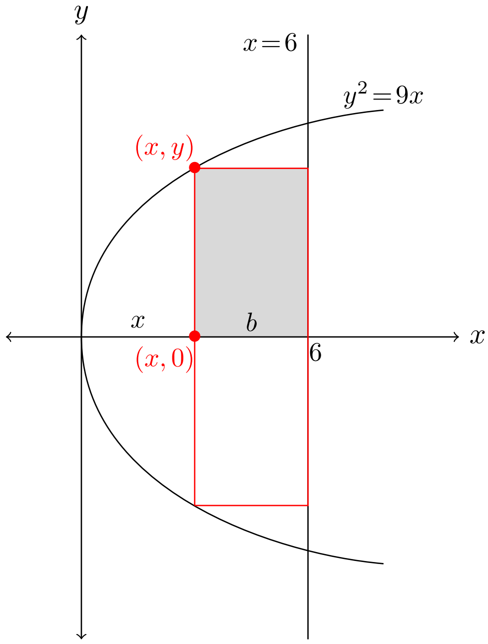
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Matemática
SEGUNDA PROVA UNIFICADA – CÁLCULO I
POLITÉCNICA E ENGENHARIA QUÍMICA 24/11/2011.

GABARITO

1ª Questão. (*2.5 pontos*).

Encontre as dimensões do retângulo de área máxima que pode ser inscrito na região limitada pela parábola $y^2 = 9x$ e pela reta $x = 6$, sendo que um dos lados do retângulo está sobre a reta dada.

- **Solução.**



Na figura ao lado, a área do retângulo em vermelho é dado por

$$A = 2by,$$

onde

$$b = 6 - x \qquad \text{e} \qquad y^2 = 9x.$$

Para $y > 0$, temos que $y = 3\sqrt{x}$. Portanto

$$\begin{aligned} A(x) &= 2(6-x)(3\sqrt{x}) \\ &= 6(6x^{1/2} - x^{3/2}). \end{aligned}$$

Assim, $A(x)$ é contínua para todo x no intervalo $(0, 6)$. Derivando

$$A'(x) = 6\left(3x^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2}\right).$$

Note que $A'(x)$ existe para todo $x \in (0, 6)$. Vejamos os pontos críticos

$$\begin{aligned} A'(x) = 0 &\implies 3x^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2} = 0 \\ &\implies x^{-1/2}\left[3 - \frac{3}{2}x\right] = 0 \implies x = 2 \quad \text{é ponto crítico.} \end{aligned}$$

Estudando o sinal de $A'(x) = \dfrac{6\,(3 - 3/2x)}{x^{1/2}}$, vemos que

(i) $A'(x) > 0$ para $x \in (0, 2)$.
(ii) $A'(x) < 0$ para $x \in (2, 6)$.

Logo, pelo Teste da Derivada Primeira, $A(x)$ tem máximo absoluto em $x = 2$. Assim, as dimensões do retângulo devem ser

$$\text{BASE} \; : \; b = 6 - x = 4.$$

$$\text{ALTURA} \; : \; h = 2y = 6\sqrt{2}.$$

2ª Questão. (*2.5 pontos*).

Calcule as seguintes integrais

(a) $\displaystyle\int xe^{x^2}\text{sen}(x^2)dx.$

(b) $\displaystyle\int_e^{\infty}\frac{1}{u(\ln^3(u)+\ln(u))}du.$

(c) $\displaystyle\int\frac{\sec^2(y)}{\sqrt{1-\text{tg}^2(y)}}dy.$

- **Solução. (a)** Seja $I=\int xe^{x^2}sen(x^2)dx$. Fazendo a substituição $z=x^2$ temos

$$I=\frac{1}{2}\underbrace{\int sen(z)e^z dz}_{I_1}. \tag{1}$$

Para resolver a integral I_1, destacada acima, usamos a técnica de integração por partes:

$$I_1=\int\overbrace{sen(z)}^{u}\overbrace{e^z dz}^{dv}=\overbrace{sen(z)}^{u}\overbrace{e^z}^{v}-\underbrace{\int\overbrace{e^z}^{v}\overbrace{cos(z)dz}^{du}}_{I_2}. \tag{2}$$

Aplicamos a técnica novamente para resolvermos I_2:

$$\begin{aligned} I_2 &= cos(z)e^z-\int e^z(-sen(z))dz \\ &= e^z cos(z)-I_1. \end{aligned} \tag{3}$$

De (2) e (3), temos

$$I_1=\frac{1}{2}e^z\left(sen(z)-cos(z)\right). \tag{4}$$

Portanto, de (1) e (4), concluímos que

$$I=\frac{1}{4}e^z\left(sen(z)-cos(z)\right)+C=\frac{1}{4}e^{x^2}\left(sen(x^2)-cos(x^2)\right)+C,$$

onde C é uma constante.

(b) Primeiramente avaliemos a integral indefinida

$$I=\int\frac{1}{u(ln^3(u)+ln(u))}du.$$

Fazendo a substituição $x=ln(u)$ temos

$$I=\int\frac{dx}{x(x^2+1)}. \tag{5}$$

Sejam A_1, A_2 e A_3 constantes tais que

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x^2+1)} &= \frac{A_1}{x}+\frac{A_2x+A_3}{x^2+1} \\ &= \frac{A_1(x^2+1)+x(A_2x+A_3)}{x(x^2+1)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Dessa forma, temos

$$1 = A_1(x^2+1) + x(A_2x + A_3) \qquad \forall\, , \, x \in \mathbb{R}.$$

Atribuindo valores arbitrários para a variável x, na equação acima, (por exemplo: $x = 0$, $x = 1$ e $x = -1$), concluímos que $A_1 = 1$, $A_2 = -1$ e $A_3 = 0$. Logo, de (5) e (6), resulta-se que

$$I = \int \frac{1}{x}dx - \underbrace{\int \frac{x}{x^2+1}dx}_{I_2}.$$

Para resolvermos I_2 façamos a substituição $z = x^2 + 1$. Então

$$I_2 = \int \frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{2} = \frac{1}{2}ln|z| + C = \frac{1}{2}ln|x^2+1| + C,$$

onde C é uma constante. Assim, temos

$$\begin{aligned} I &= ln|x| - \frac{1}{2}ln|x^2+1| + C \\ &= ln|ln(u)| - \frac{1}{2}ln|ln^2(u)+1| + C \quad = \quad ln\left|\frac{ln(u)}{\sqrt{ln^2(u)+1}}\right| + C. \end{aligned}$$

Logo

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{u(ln^3(u) + ln(u))}du = \lim_{b\to\infty} I(u)\Big|_e^b = \lim_{b\to\infty}\left(ln\left|\frac{ln(b)}{\sqrt{ln^2(b)+1}}\right| + \left(\frac{1}{2}ln(2)\right)\right).$$

Por outro lado, note que

$$\lim_{b\to\infty} ln\left|\frac{ln(b)}{\sqrt{ln^2(b)+1}}\right| = ln\left(\lim_{b\to\infty}\left|\frac{ln(b)}{|ln(b)|\sqrt{1+\frac{1}{ln^2(b)}}}\right|\right) = ln(1) = 0.$$

Portanto,

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{u(ln^3(u)+ln(u))}du = \frac{1}{2}ln(2).$$

(c) Seja $I = \int \frac{sec^2(y)}{\sqrt{1-tg^2(y)}}dy$. Fazendo a substituição $x = tg(y)$, temos $dx = \sec^2(y)dy$. Assim $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Para resolver esta integral podemos usar a fórmula conhecida ou a substituição $x = \text{sen}(\theta)$, para obter $dx = \cos(\theta)d\theta$ e $\cos(\theta) = \sqrt{1-x^2}$, e estabelecer que

$$I \;=\; \int d\theta \;=\; \theta + C \;=\; \text{arcsen}(x) + C \;=\; \text{arcsen}(\text{tg}(y)) + C.$$

onde C é uma constante.

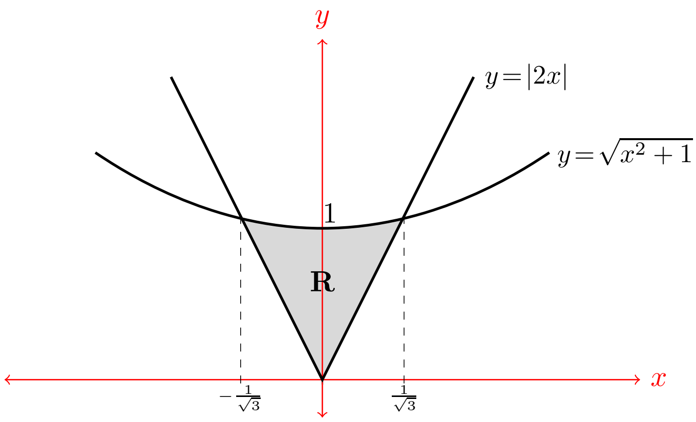
3ª Questão. (*2.5 pontos*).

Calcule a área da região limitada pelas curvas $y = \sqrt{x^2+1}$ e $y = |2x|$. Faça um esboço da região.

- **Solução.**

Para esboçar o gráfico, note que $y = \sqrt{x^2+1}$ é a parte superior da hiperbole $y^2 - x^2 = 1$. Ou também podemos calcular $y'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ para obter que $x = 0$ é um ponto crítico; além disso temos que $y''(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^{3/2}} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim a função é côncava para cima com $y''(0) = 1 > 0$, isto é $x = 0$ é um ponto de mínimo absoluto.

Esboço do gráfico da região



Pontos de interseção das curvas

$$\sqrt{x^2+1} = |2x| \quad \Longleftrightarrow \quad x^2+1 = 4x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Assim, pela simetria da região R, a área dela é dada pela integral

$$\begin{aligned} A(R) &= 2\int_0^{1/\sqrt{3}} \left(\sqrt{x^2+1} - 2x\right) dx = 2\left(\int_0^{1/\sqrt{3}} \sqrt{x^2+1}dx\right) - 2x^2\Big|_{x=0}^{x=1/\sqrt{3}} \\ &= 2\left(\int_0^{1/\sqrt{3}} \sqrt{x^2+1}dx\right) - \frac{2}{3}. \end{aligned} \tag{7}$$

Portanto, para calcular a área $A(R)$, resta calcular a integral em (7). Para isto podemos, usando a substituição

$$x = \mathrm{tg}(\theta) \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x^2+1} = \sec(\theta) \ \ , \ \ dx = \sec^2(\theta)d\theta.$$

Logo $\int \sqrt{x^2+1}dx = \int \sec^3(\theta)d\theta$. Calculando

$$\begin{aligned} \int \sec^3(\theta)d\theta &= \int (1+\mathrm{tg}^2(\theta))\sec(\theta)d\theta \\ &= \int \sec(\theta)d\theta + \int \mathrm{tg}^2(\theta)\sec(\theta)d\theta \\ &= \ln|\mathrm{tg}(\theta)+\sec(\theta)| + \int \mathrm{tg}^2(\theta)\sec(\theta)d\theta, \end{aligned} \tag{8}$$

onde, usando integração por partes, teremos

$$\int \mathrm{tg}^2(\theta)\sec(\theta)d\theta \ = \ \int \mathrm{tg}(\theta)d(\sec(\theta)) \ = \ \mathrm{tg}(\theta)\sec(\theta) - \int \sec^3(\theta)d\theta.$$

Logo, substituíndo em (8) e voltando à variável de integração x, teremos que

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \int \sec^3(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\left[\ln(\sqrt{x^2+1}+x) + x\sqrt{x^2+1}\right] + C.$$

Assim, substituíndo em (7), teremos que

$$A(R) = \left[\ln(\sqrt{x^2+1}+x) + x\sqrt{x^2+1}\right]_{x=0}^{x=1/\sqrt{3}} - \frac{2}{3} \ = \ \frac{1}{2}\ln(3).$$

OBSERVAÇÃO. É possível tambem usar a substituição $x = \sinh(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ para mostrar que

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \int \cosh^2(t)dt = \int \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 dt.$$

Logo, deduzindo que $t = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, podemos chegar ao mesmo resultado.

4ª Questão. (*2.5 pontos*).

Seja a curva $f(x) = M\cos(x)$ definida sobre o intervalo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, onde M é uma constante não nula. Calcule o(s) valor(es) de M de tal forma que o volume gerado pela rotação da região limitada pela curva $f(x)$, as retas $x = -\dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{\pi}{4}$ e $y = 0$, em torno do eixo-x, tenha um volume igual a $\dfrac{\pi}{4}$.

- **Solução.**

O volume do sólido formado pela rotação em torno do eixo x da região limitada pelas curvas $M\cos(x)$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$ e $y = 0$ é exatamente:

$$\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} (M\cos(x))^2 dx = \frac{\pi}{4}. \tag{9}$$

Para descobrir qual(is) valor(es) para a constante M, precisamos resolver a integral acima. Assim,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} (M\cos(x))^2 dx = M^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \cos^2(x)dx$$

Usando a seguinte identidade na integral acima,

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2},$$

teremos

$$\begin{aligned} M^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \cos^2(x)dx &= M^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2x)}{2}dx \\ &= \frac{M^2}{2}\left[\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} 1dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \cos(2x)dx\right] \end{aligned}$$

Resolvendo as integrais definidas acima, temos que

$$\frac{M^2}{2}\left[\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} 1dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \cos(2x)dx\right] \quad = \quad \frac{M^2}{2}\left[\frac{2\pi}{4} + 1\right] \quad = \quad \frac{M^2(\pi+2)}{4}.$$

Chegamos ao resultado da integral,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} (M\cos(x))^2 dx = \frac{M^2(\pi+2)}{4}.$$

Substituindo na equação (9), resulta em

$$\pi\frac{M^2(\pi+2)}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Faltando apenas descobrir qual(is) valor(es) para a constante M tal que a equação acima é verdadeira. Então,

$$M^2(\pi+2) = 1 \qquad \text{isto é} \qquad M = \pm\sqrt{\frac{1}{\pi+2}}.$$