Universidade Federal do Rio de Janeiro
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Métodos Matemáticos

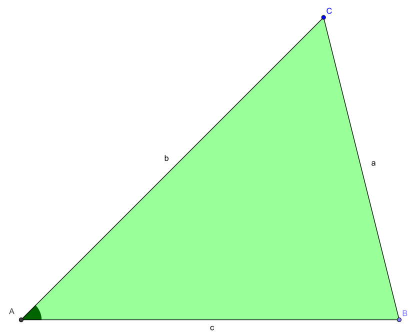
2^a Prova Unificada de Cálculo I - Politécnica e Engenharia Química
21/06/2011

1^a **Questão:** (2 pontos)

Em um triângulo ABC o comprimento do lado AB é de 5 cm. O lado BC está crescendo a uma taxa de 4 cm/h enquanto que AC está decrescendo à razão de 2 cm/h. No instante em que ABC for um triângulo equilátero, o ângulo $\widehat{A}$ estará aumentando ou diminuindo? Com que taxa?

Solução.

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ABC,



$$a^2 = b^2 + 5^2 - 10b\cos\widehat{A},$$

onde a, b e o ângulo $\widehat{A}$ são funções do tempo t e $c = 5$.

Derivando os dois membros da equação acima com relação à variável t obtemos,

$$2a\frac{da}{dt} = 2b\frac{db}{dt} - 10\frac{db}{dt}\cos\widehat{A} + 10b\,\mathrm{sen}\,\widehat{A}\,\frac{d\widehat{A}}{dt},$$

e, portanto,

$$\frac{d\widehat{A}}{dt} = \frac{a\dfrac{da}{dt} - b\dfrac{db}{dt} + 5\dfrac{db}{dt}\cos\widehat{A}}{5b\,\mathrm{sen}\,\widehat{A}}.$$

No instante ao qual o problema se refere,

$$a = b = 5, \quad \frac{da}{dt} = 4, \quad \frac{db}{dt} = -2 \quad \text{e} \quad \widehat{A} = \frac{\pi}{3} \text{ radianos.}$$

Logo,

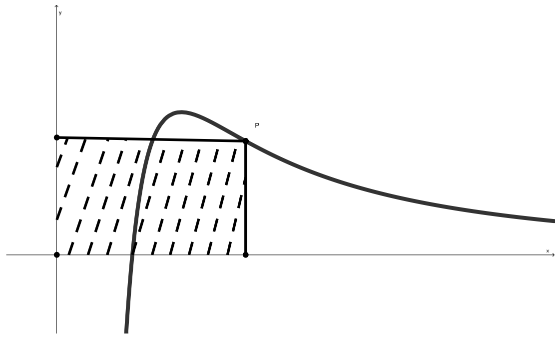
$$\frac{d\widehat{A}}{dt} = \frac{2\sqrt{3}}{3} > 0.$$

Como a taxa de variação do ângulo $\widehat{A}$ é positiva, concluímos que $\widehat{A}$ está ***crescendo*** a uma taxa de $2\sqrt{3}/3$ radianos por hora.

2^a **Questão:** (2,0 pontos)

Encontre as dimensões do retângulo de maior área possível, sabendo-se que possui um lado no eixo y positivo, o outro lado no eixo x positivo para $x > 1$ e seu vértice superior direito na curva $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$, como no desenho abaixo. Justifique.

Solução.



A área é dada pela função

$$A(x) = \frac{x \ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x}, \ x > 1.$$

Procurando por pontos críticos:

$$A'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$$

quando $x = e$, logo temos um único ponto crítico, $x = \mathrm{e}$.

Como $A'(x) > 0$ se $0 < x < e$, a função é crescente em $(1, e)$.
Como $A'(x) < 0$ se $x > e$, a função é decrescente em (e, ∞).
Logo, o ponto $(e, 1/e)$ é ponto de máximo local.

Como $A(x)$ é uma função contínua em $(1, \infty)$ com um único ponto crítico em $(1, \infty)$, o ponto $(e, 1/e)$ é de máximo absoluto.

O retângulo de maior área tem lados de comprimento e por $\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

3^a **Questão:** (3 pontos)

Calcule:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\, dx$
2. $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\, dx$
3. $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} h\ln(\operatorname{sen} h)$

Solução.

1. Usando a substituição trigonométrica $x = 2\sec\theta$, $\theta \in (0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2)$, temos $dx = 2\sec\theta \operatorname{tg}\theta d\theta$. Portanto,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\, dx = \int \frac{2\sec\theta \operatorname{tg}\theta}{4(\sec\theta)^2\sqrt{4(\operatorname{tg}\theta)^2}}\, d\theta = \frac{1}{4}\int \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta + C.$$

Como $\dfrac{x}{2} = \sec\theta$, temos $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}$, logo

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-4}} dx = \frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} + C.$$

2. Vamos calcular usando o método de integração por partes. Escolhemos $u = \operatorname{arctg} x$ e $dv = dx$, obtendo $du = \dfrac{1}{x^2+1}\, dx$ e $v = x$. Logo,

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2+1}\, dx.$$

Fazendo a substituição $y = x^2 + 1$, obtemos

$$\int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\, dy = \frac{1}{2}\ln|y| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

Portanto,

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

3. Aplicando l'Hospital ao limite a seguir, obtemos:

$$\lim_{h\to 0^+} h\ln(\operatorname{sen} h) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(senh)}{1/h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{cotg} h}{-1/h^2} = \lim_{h\to 0^+} -\left(\frac{h}{\operatorname{sen} h}\right) h\cos h = 0.$$

4^a **Questão:** (3 pontos)

1. Considere as funções $h(x) = 4\mathrm{e}^{x^2-4x}$ e $g(x) = f'(x)$ onde $f(x) = \displaystyle\int_0^x 2t\mathrm{e}^{t^2-4t}\,dt$. Calcule a área limitada por $y = h(x)$, $y = g(x)$ e $x = 5$.
2. Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação da região R entre o gráfico de $y = \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ e o eixo x, para $x \geq 2$, ao redor do eixo x.

Solução.

1. Observe que, pelo teorema fundamental do cálculo, $g(x) = f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2-4x}$.
Repare que $h(x) = g(x)$ se e somente se $x = 2$.
Assim, a área pode ser calculada por:
$$\int_2^5 (g(x) - h(x))\,dx = \int_2^5 (2x-4)\mathrm{e}^{x^2-4x}\,dx.$$
Fazendo a substituição $u = x^2 - 4x$, obtemos
$$\int (2x-4)\mathrm{e}^{x^2-4x}\,dx = \int \mathrm{e}^u\,du = \mathrm{e}^u + C = e^{x^2-4x} + C.$$
Logo,
$$\int_2^5 (2x-4)\mathrm{e}^{x^2-4x}\,dx = \mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^{-4}.$$
2. O volume é dado pela integral imprópria:
$$\int_2^\infty \pi\frac{1}{x(1+x)^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \pi \int_2^b \frac{1}{x(1+x)^2}\,dx.$$
Desenvolvendo em frações parciais,
$$\frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{(1+x)} + \frac{-1}{(1+x)^2}$$
e a integral indefinida
$$\int \frac{1}{x(1+x)^2}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{-1}{(1+x)}\,dx + \int \frac{-1}{(1+x)^2}\,dx = \ln x - \ln(1+x) + \frac{1}{(1+x)}.$$
Logo
$$\lim_{b\to\infty} \pi \int_2^b \frac{1}{x(1+x)^2}\,dx = \pi \lim_{b\to\infty}\left[\left(\ln b - \ln(1+b) + \frac{1}{(1+b)}\right) - \left(\ln 2 - \ln 3 + \frac{1}{3}\right)\right] =$$
$$= \pi \lim_{b\to\infty}\left[\ln\left(\frac{b}{1+b}\right) + \frac{1}{(1+b)} + \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3}\right] = \pi\left[\ln 1 + 0 + \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3}\right] =$$
$$= \pi\left[\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3}\right].$$