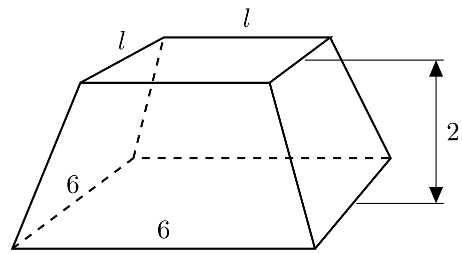
DEPARTAMENTO de MÉTODOS MATEMÁTICOS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

GABARITO da SEGUNDA PROVA UNIFICADA de CÁLCULO I

06 de DEZEMBRO de 2010

Questão 1. (2,0 pontos)

Para o carnaval de 2011, o bloco carnavalesco “Vai que é Mole” fará um carro alegórico composto de 4 troncos de pirâmides regulares com base quadrada. Estes troncos serão todos iguais e terão sua superfície lateral revestida com um material imitando ouro.
Veja um destes troncos na figura ao lado.



Cada tronco de pirâmide terá 2 m de altura e sua base inferior será um quadrado de 6 m de lado. A base superior, onde ficará um destaque do “Vai que é Mole”, será um quadrado de lado l, com $l \geq 2$ m. Qual deve ser o valor de l para que a quantidade do material que será usado no revestimento da superfície lateral dos troncos seja a menor possível?

Solução.

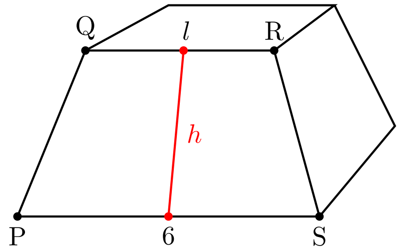


Figura 1

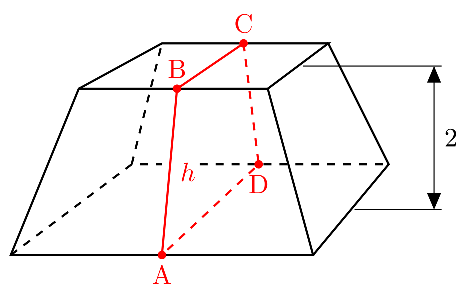


Figura 2

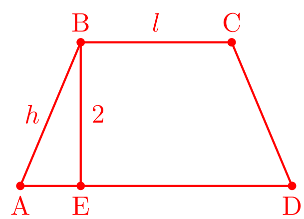


Figura 3

Na figura 1 acima, a área do trapézio PQRS é $\dfrac{6+l}{2}h$. Logo, a área lateral de cada tronco de pirâmide é $2(6+l)h$. Para calcularmos h, observamos o trapézio ABCD nas figuras 2 e 3. Na figura 3, fazemos $l = 2x$, obtendo $\mathrm{AE} = 3 - x$. Assim, $h = \sqrt{4 + (3-x)^2} = \sqrt{13 - 6x + x^2}$.
Como $2 \leq l = 2x \leq 6$, concluímos que a área lateral de cada tronco é dada por

$$A(x) = 4(3+x)\sqrt{13 - 6x + x^2}, \text{ onde } 1 \leq x \leq 3.$$

Derivando, obtemos

$$A'(x) = 4\left(\sqrt{13 - 6x + x^2} + \frac{(3+x)(x-3)}{\sqrt{13-6x+x^2}}\right) = 8\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{13 - 6x + x^2}}\right), \text{ onde } 1 \leq x \leq 3.$$

Observando que o denominador de A' é positivo, verificamos que se $1 < x < 2$, $A' < 0$. E, se $2 < x < 3$, $A' > 0$. Logo, a área A é mínima para $x = 2$. Sendo assim, devemos ter $l = 4$.

Questão 2. (3,0 pontos)

Calcule as integrais:

(a) (1,5 ponto). $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^5}}\,dx$

(b) (1,5 ponto). $\displaystyle\int \frac{5x+8}{(x-1)(x^2+4x+8)}\,dx$

Solução.

(a) Primeiramente, calculamos uma primitiva para $(\ln x)/\sqrt{x^5}\,dx$ usando integração por partes. Tomando $u = \ln x$ e $dv = x^{-5/2}dx$, obtemos $du = x^{-1}dx$ e $v = (-2/3)x^{-3/2}$. Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{\sqrt{x^5}}\,dx &= (-2/3)\frac{\ln x}{x^{3/2}} + (2/3)\int x^{-3/2}\cdot x^{-1}dx \\ &= (-2/3)\frac{\ln x}{x^{3/2}} - \frac{4}{9x^{3/2}}. \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\ln x}{\sqrt{x^5}}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\left[(-2/3)\frac{\ln x}{x^{3/2}} - \frac{4}{9x^{3/2}}\right]_1^t \\ &= \lim_{t\to\infty}\left((-2/3)\frac{\ln t}{t^{3/2}} - \frac{4}{9t^{3/2}} + 4/9\right) = 4/9, \end{aligned}$$

uma vez que, por L'Hôpital,

$$\lim_{t\to\infty}(-2/3)\frac{\ln t}{t^{3/2}} = 0.$$

Logo,

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x^5}}\,dx = 4/9.$$

(b) Vamos resolver usando o método de frações parciais. Primeiro, verificamos que os fatores $(x-1)$ e (x^2+4x+8) são irredutíveis. Fazendo

$$\frac{5x+8}{(x-1)(x^2+4x+8)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+8},$$

obtemos

$$(A+B)x^2 + (4A-B)x + (8A-C) = 5x+8,$$

donde conluimos que $A = 1$, $B = -1$ e $C = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+8}{(x-1)(x^2+4x+8)}\,dx &= \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{x}{x^2+4x+8}\,dx \\ &= \ln|x-1| - \int \frac{x}{x^2+4x+8}\,dx. \end{aligned} \tag{1}$$

Resta então calcular

$$\int \frac{x}{x^2+4x+8}\,dx = \int \frac{x}{(x+2)^2+4}\,dx.$$

Fazendo $u = x+2$, temos $du = dx$ e $x = u-2$, logo

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+4x+8}\,dx = \int \frac{u-2}{u^2+4}\,du &= \int \frac{u}{u^2+4}\,du - 2\int \frac{1}{u^2+4}\,du \\ &= (1/2)\ln|u^2+4| - \operatorname{arctg}(u/2) + C \\ &= (1/2)\ln(x^2+4x+4) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

Agora basta substituir em (1).

Questão 3. (3,0 pontos)

(a) (1,0 ponto). Encontre $f(x)$ positiva e contínua tal que a área sob seu gráfico de $x = 0$ até $x = t$ vale $e^{t^2} - e^{-t^2}$, para todo $t > 0$.

(b) (2,0 pontos). Ache a área limitada pelas curvas $y = x^2\sqrt{2}$ e $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Solução.

(a) De acordo com o enunciado da questão:

$$\int_0^t f(x)dx = e^{t^2} - e^{-t^2}.$$

Lembrando da primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo, derivamos os dois membros desta igualdade, obtendo

$$f(t) = 2te^{t^2} + 2te^{-t^2}.$$

(b) Para achar os pontos de interseção, basta resolver a equação $x^2\sqrt{2} = \sqrt{1 - x^2}$, que é equivalente à equação biquadrática $2x^4 + x^2 - 1 = 0$. Suas raízes reais são $x = \sqrt{2}/2$ e $x = -\sqrt{2}/2$. Logo, a área limitada entre as curvas é dada por:

$$A = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \sqrt{1 - x^2}\, dx - \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} x^2\sqrt{2}\, dx.$$

Para a primeira integral usamos a substituição $x = \operatorname{sen}(\theta)$:

$$\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2(\theta)\, d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}\, d\theta = \left(\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4} + \frac{\theta}{2} \right)\Bigg|_{\theta=-\pi/4}^{\theta=\pi/4} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

Na segunda integral usamos o Teorema Fundamental do Cálculo diretamente:

$$\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} x^2\sqrt{2}\, dx = \left(\frac{x^3\sqrt{2}}{3} \right)\Bigg|_{x=-\sqrt{2}/2}^{x=\sqrt{2}/2} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, a área limitada entre as curvas é dada por:

$$A = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$

Questão 4. (2,0 pontos)

Qual deve ser o valor de m para que o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pelas curvas $y = mx$ e $y = \sqrt{x}$ em torno do eixo y seja igual a $\frac{\pi}{15}$?

Solução.

Os pontos de interseção das curvas são dados por

$$y^2 = \frac{1}{m}y \Leftrightarrow y = 0,\ y = \frac{1}{m}.$$

Logo, o volume da região será,

$$V = \int_0^{1/m} \left[\pi \left(\frac{1}{m}y \right)^2 - \pi (y^2)^2 \right] dy = \pi \int_0^{1/m} \left(\frac{1}{m^2}y^2 - y^4 \right) dy = \pi \left[\frac{1}{3m^2}y^3 - \frac{y^5}{5} \right]_0^{1/m} = \frac{2\pi}{15m^5}.$$

Segue que

$$\frac{\pi}{15} = \frac{2\pi}{15m^5} \Leftrightarrow m^5 = 2 \Leftrightarrow m = \sqrt[5]{2}.$$