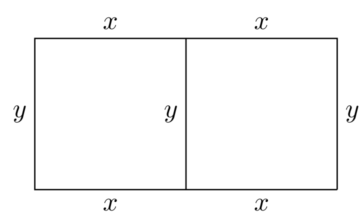
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
**SEGUNDA PROVA de CÁLCULO I** – 2010/1

# GABARITO

**Questão 1**.*(1,5 pontos)*

Um fazendeiro quer construir dois currais retangulares, iguais e com um lado em comum. A soma das áreas dos currais deverá ser $216m^2$. Quais serão as dimensões dos currais para que o comprimento total da cerca necessária seja o menor possível? Justifique.

**Solução**.
Graficamente temos que




Assim, a soma das áreas será: $2xy = 216$, logo $xy = 108 \Rightarrow y = \dfrac{108}{x}$. O comprimento da cerca será dado pela função

$$f(x) \; = \; 4x + \frac{324}{x} \;, \quad x \in (0, +\infty).$$

Logo $f'(x) = 4 - \dfrac{324}{x^2}$. Portanto o número crítico é obtido por

$$f'(x) = 4 - \frac{324}{x^2} \; = \; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = 81 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 9, \; x \in (0, +\infty).$$

Como $x = 9$ é o único ponto crítico de $f(x)$ contínua em $(0, +\infty)$, estudando o sinal de $f'(x)$ teremos que $f$ tem um mínimo absoluto em $x = 9$. Logo as dimensões dos currais serão: $x = 9$ e $y = 12$.

**Questão 2**.*(3,0 pontos)*

Calcule:

(a) $\displaystyle\int \frac{\cos(3x)}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}(3x)}}\, dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x}}$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^3 + x^2}$

**Solução**.

(a) Usando $u = \operatorname{sen} 3x$, teremos $du = 3\cos 3x$. Logo,

$$\int \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} 3x}}\, dx = \int \cos 3x \; (\operatorname{sen} 3x)^{-1/3}\, dx = \frac{1}{3} \int u^{-1/3}\, du = \frac{1}{2} u^{2/3} + C = \frac{(\operatorname{sen} 3x)^{2/3}}{2} + C.$$

(b) Completando o quadrado e fazendo $u = x - 2:$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2 - 4}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 4}}.$$

Tomando $u = 2\sec\theta$, com $\theta \in [0, \pi/2)$: $du = 2\sec\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta$ e $\operatorname{tg}\theta \geq 0$. Assim,

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 4}} = \int \frac{2\sec\theta \operatorname{tg}\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta - 4}}\, d\theta = \int \frac{2\sec\theta \operatorname{tg}\theta}{2\operatorname{tg}\theta}\, d\theta = \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C.$$

Como $\sec\theta = u/2 = (x-2)/2$, temos $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \sqrt{x^2-4x}\Big/2$ e, portanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x}} = \ln\left|\frac{x-2}{2} + \frac{\sqrt{x^2-4x}}{2}\right| + C = \ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x}\right| + C.$$

(c) Decompondo em soma de frações parciais:

$$\frac{1}{2x^3+x^2} = \frac{1}{x^2(2x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(2x+1)} = \frac{A(2x+1)+Bx(2x+1)+Cx^2}{2x^3+x^2}.$$

Então,

$$1 = (2B+C)x^2 + (2A+B)x + A \Rightarrow \begin{cases} 2B+C=0 \\ 2A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-2 \\ C=4 \end{cases}.$$

Finalmente,

$$\int \frac{dx}{2x^3+x^2} = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{4}{(2x+1)}\right) dx = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + 2\ln|2x+1| + C.$$

**Questão 3**.*(2,0 pontos)*

Determine o valor da constante $\alpha$ de maneira que a integral $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{\alpha}{2x+1}\right) dx$ seja convergente.

**Solução**.

Note que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{\alpha}{2x+1}\right) dx &= \left(\ln(x^2+1) - (\frac{\alpha}{2})\ln(2x+1)\right)\Bigg|_0^\infty \\ &= \ln\left(\frac{(x^2+1)}{(2x+1)^{(\frac{\alpha}{2})}}\right)\Bigg|_0^\infty \end{aligned}$$

Portanto, devemos analisar $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2+1)}{(2x+1)^{(\frac{\alpha}{2})}}\right)$.

$$a)\quad \alpha = 4 \implies \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2+1)}{(2x+1)^{(\frac{\alpha}{2})}}\right) = \frac{1}{4}$$

$$b)\quad \alpha > 4 \implies \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2+1)}{(2x+1)^{(\frac{\alpha}{2})}}\right) = 0$$

$$c)\quad \alpha < 4 \implies \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2+1)}{(2x+1)^{(\frac{\alpha}{2})}}\right) = \infty.$$

Assim, $\alpha = 4$ e $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{2x+1}\right) dx = \ln\frac{1}{4}$.

**Questão 4**.*(1,5 pontos)*

Calcule a área limitada pelas curvas $y = x(x-2)^2$ e $y = x$.

**Solução**. Como

$$x(x-2)^2 = x \iff x[(x-2)^2-1] = 0 \iff x(x-1)(x-3) = 0,$$

as curvas se intersectam quando $x=0$, $x=1$ e $x=3$. Logo a área limitada pelas curvas é dada por: $A = A_1 + A_2$, onde

$$A_1 = \left|\int_0^1 [x(x-2)^2 - x]\,dx\right| \quad \text{e} \quad A_2 = \left|\int_1^3 [x(x-2)^2 - x]\,dx\right|.$$

Temos $\displaystyle\int [x(x-2)^2 - x]\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + C$. Logo

$$A_1 = \left|\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right| = \frac{5}{12}$$

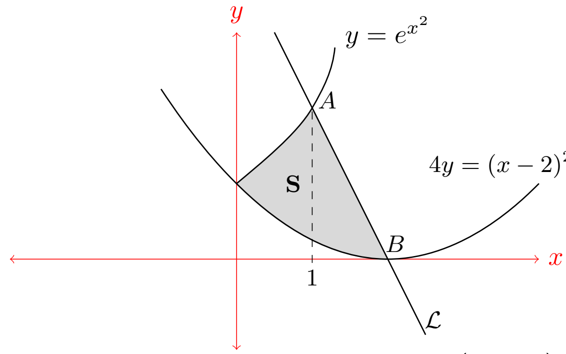
e

$$A_2 = \left| \left( \frac{81}{4} - \frac{108}{3} + \frac{27}{2} \right) - \left( \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right) \right| = \left| \frac{80}{4} - \frac{104}{3} + \frac{24}{2} \right| = \left| 20 + 12 - \frac{104}{3} \right| = \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{8}{3}$$

Portanto a área é $A = A_1 + A_2 = \dfrac{5}{12} + \dfrac{8}{3} = \dfrac{37}{12}$.

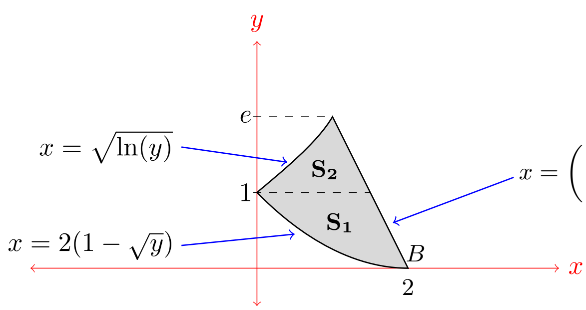
**Questão 5**.*(2,0 pontos)*

Na figura ao lado, seja $A$ o ponto de interseção da curva $y = e^{x^2}$ e a reta $\mathcal{L}$, e seja $B$ o vértice da parábola $4y = (x-2)^2$. Suponha que a reta $\mathcal{L}$ passa pelos pontos $A$ e $B$.
Calcule o volume gerado pela rotação da região sombreada $S$ em torno do eixo-y.




**Solução**. Do gráfico temos que $A = (1, e)$ e $B = (2, 0)$. Logo a equação da reta $\mathcal{L}$ será $x = \left( \dfrac{2e - y}{e} \right)$.
Alem disso, no primeiro quadrante temos que

$$\begin{aligned} y &= e^{x^2} \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{\ln(y)}, \\ 4y &= (x-2)^2 \quad \text{e} \quad 0 \le x \le 2 \quad \Longrightarrow \quad x = 2(1 - \sqrt{y}). \end{aligned}$$




Portanto, como $S = S_1 \cup S_2$, então o volume gerado pela rotação de $S$ em torno do eixo-y é igual a suma dos volumes gerados pelas rotações de $S_1$ e $S_2$ em torno do eixo-y. Assim

$$\begin{aligned} V_{S_1} &= \int_0^1 \left[ \pi \left( \frac{2e - y}{e} \right)^2 - \pi \Big( 2(1 - \sqrt{y}) \Big)^2 \right] dy \\ &= \pi \int_0^1 \left[ \frac{y^2}{e^2} + 8\sqrt{y} - 4\Big(1 + \frac{1}{e}\Big) y \right] dy \\ &= \pi \left[ \frac{y^3}{3e^2} + \frac{16}{3} y^{3/2} - 2\Big(1 + \frac{1}{e}\Big) y^2 \right]_0^1 \\ &= \pi \left[ \frac{1}{3e^2} + \frac{16}{3} - 2\Big(1 + \frac{1}{e}\Big) \right], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} V_{S_2} &= \int_1^e \left[ \pi \left( \frac{2e - y}{e} \right)^2 - \pi \left( \sqrt{\ln(y)} \right)^2 \right] dy \;=\; \pi \int_1^e \left[ 4 - \frac{4y}{e} + \frac{y^2}{e^2} - \ln(y) \right] dy \\ &= \pi \left[ 4y - \frac{2y^2}{e} + \frac{y^3}{3e^2} \right]_1^e - \pi \left[ \ln(y) y \Big|_1^e - \int_1^e dy \right] \qquad \ldots\textit{(integração por partes)} \\ &= \pi \left[ \frac{7e}{3} - 5 + \frac{2}{e} - \frac{1}{3e^2} \right]. \end{aligned}$$

Logo o volume total será dado por $V_S = V_{S_1} + V_{S_2} = \left( \dfrac{7e - 5}{3} \right) \pi$.