INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Resolução da 2ª Prova Unificada de Cálculo I
Engenharia e Engenharia Química
09/12/2009

1ª Questão: (1.5 pontos)
Solução.
Denotando por:
r=raio da base da caixa cilíndrica.
h=altura da caixa cilíndrica, temos a área lateral $A_L = 2\pi rh$ e a área da base $A_B = \pi r^2$.
A função Custo será : $C(r,h) = 10(A_L + A_B) + 20A_B = 10(2\pi rh + \pi r^2) + 20\pi r^2$.
Como a caixa deve ter volume $V = 1m^3$ e $V = \pi r^2 h$, temos $h = \dfrac{1}{\pi r^2}$.
Assim, a função C(r,h) é escrita como C(r)=$30\pi r^2 + \dfrac{20}{r}$. Portanto,
$C'(r) = 60\pi r - \dfrac{20}{r^2} = \dfrac{60\pi r^3 - 20}{r^2}$ e $C'(r) = 0 \Longleftrightarrow 60\pi r^3 = 20r^2 \Longleftrightarrow r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}$. Como, $C"(r) = 60\pi + \dfrac{40}{r^3}$ temos que $C"(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}) > 0$, sendo $r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}$ ponto de mínimo relativo da função C(r). Como C(r)é uma função derivável em$(0,\infty)$ e $lim_{r\to 0}C(r) = lim_{r\to\infty}C(r) = \infty$ temos que $r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}$ é ponto de mínimo global.
Substituindo este valor em h , temos que $h = \sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}$.

2ª Questão: (3,0 pontos)
a)Fazendo $u = e^{3\,arctg(x)}$ temos , $du = \dfrac{3}{t^2+1}\, e^{3\,arctg(t)}\, dt$.
Assim, $\displaystyle\int \frac{e^{3arctg(t)}}{t^2+1}\, dt = \int \frac{du}{3} = \frac{u}{3} + C = \frac{e^{3arctg(t)}}{3} + C$.

b)Fazendo $u = (lnx)^2$ e $dv = x\,dx$, temos que $du = 2\dfrac{\ln x}{x}$ e $v = \dfrac{x^2}{2}$.
Integrando por partes :
$\int x(ln(x))^2\, dx = \dfrac{x^2(lnx)^2}{2} - \displaystyle\int x\, lnx\, dx$.

Integrando novamente por partes , com $u = lnx$, $dv = x\,dx$, $du = \dfrac{1}{x}$ e $v = \dfrac{x^2}{2}$, obtemos:
$\int x(ln(x))^2\, dx = \dfrac{x^2(lnx)^2}{2} - \dfrac{x^2 lnx}{2} + \dfrac{\int x\,dx}{2} = \dfrac{x^2(lnx)^2}{2} - \dfrac{x^2 lnx}{2} + \dfrac{x^2}{4} + C$.

c)Usaremos frações parciais.
$$\frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+b}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}$$
Temos que $4 - 2x = (A+C)x^2 + (B-A)x + (C-B)$. Assim :
A+C=0
B-A=-2
C-B=4

Encontrando os valores de A, B e C temos:
A=-1 , B=-3 e C=1. Assim,

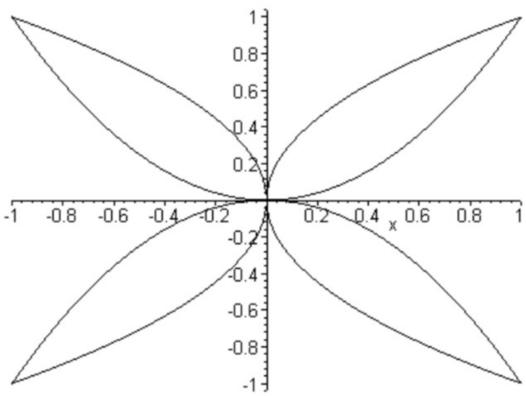
$$\int \frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)}\,dx = \int \frac{-(x+3)}{x^2+1} + \int \frac{1}{x-1}\,dx =$$

$$\int \frac{-(x)}{x^2+1} + \int \frac{-(3)}{x^2+1} + \int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \ln(x-1) - \frac{ln(x^2+1)}{2} - \int \frac{3}{(x^2+1)}\,dx$$

$$= \ln(x-1) - \frac{ln(x^2+1)}{2} - 3arctgx + \text{C}.$$

3 ª Questão: (2,0 pontos)
a) O gráfico é :



b) Devido a simetria das curvas, basta considerarmos a região situada no 1 quadrante e multiplicá-la por 4.
Pontos de interseção no 1 quadrante :
De $y^2 = x$ e $x^2 = y$ obtemos que $x^4 = x \Rightarrow x = 0 \; ou \; x = 1$. Assim, os pontos de interseção são (0,0) e (1,1).
Portanto, a área no 1 quadrante será $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\;dx = (\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3})\big|_0^1 = \frac{1}{3}$. Logo, a área S será igual a $\frac{4}{3}$

4 ª Questão: (2,0pontos)
Devemos encontrar o valor de **a** que satisfaça a equação : $2\pi = \pi \int_0^a x\, e^{(2x^2)}\,dx.$

Fazendo $u = 2x^2 \Rightarrow du = 4xdx$, temos $\int x\, e^{(2x^2)}dx = \int \frac{e^u}{4}\,du = \frac{e^u}{4} = \frac{e^{(2x^2)}}{4}$
Assim, $\int_0^a x\, e^{(2x^2)}\,dx = \frac{e^{(2x^2)}}{4}\big|_0^a = \frac{e^{(2a^2)}-1}{4}$.
Portanto, $2 = \frac{e^{(2a^2)}-1}{4} \Rightarrow 9 = e^{2a^2} \Rightarrow \ln 3 = a^2$
Assim, $a = \sqrt{\ln 3}$

5 ª Questão: (1,5 pontos)
Basta calcular o custo da curva C_1 e multiplicá-lo por dois. Custo da curva C_1:
É mais simples escrevermos x=f(y)=$(\frac{y}{3})^{3/2}$, e então calcular o comprimento do arco C_1 em função de y. Assim, $x' = \frac{1}{2}(\frac{y}{3})^{1/2}$ e o comprimento de $\mathbf{C}_1$ é dado por $L_1 =$

$$\int_0^{12} \sqrt{1+\frac{y}{12}}\, dy = 8(1+\frac{y}{12})^{3/2}\Big|_0^{12} = 16\sqrt{2} - 8 = 8(2\sqrt{2}-1).$$

Portanto,$L_1 = 8(2\sqrt{2}-1)$, e o custo total da obra será de R\$ $16(2\sqrt{2}-1)\,.10^4, 00$.