INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Solução da **2ª Prova Unificada de Cálculo I**
Engenharia e Engenharia Química

1ª Questão: (3.0 pontos)
Calcule as integrais abaixo:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{t\sqrt{\ln^2(t)-16}}\,dt$ b) $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx.$

c) $\displaystyle\int \frac{(2x^2+1)}{x(x-1)^2}\,dx.$

Solução

a) Seja $u = ln(t)$, então $du = \dfrac{1}{t}dt$. Fazendo esta substituição temos :

$$\int \frac{1}{t\sqrt{\ln^2(t)-16}}\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{u^2-16}}\,du$$

Fazendo uma nova substituição $u = 4\sec(\theta)$ temos $\sqrt{u^2-16} = 4\tan\theta$, e $du = 4\sec(\theta)\tan(\theta)d\theta$, temos :

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2-16}}\,du = \int \sec(\theta)d\theta = \ln\mid\sec(\theta)\tan(\theta)\mid + C.$$

Voltando para a variável t de integração temos :

$$\ln\mid\sec(\theta)\tan(\theta)\mid + C = \ln\left|\frac{\ln(t)+\sqrt{\ln^2(t)-16}}{4}\right| + C$$

Assim,

$$\int \frac{1}{t\sqrt{\ln^2(t)-16}}\,dt = \ln\left|\frac{\ln(t)}{4} + \frac{\sqrt{\ln^2(t)-16}}{4}\right| + C$$

b) Integrando por partes : $u = xe^x$, $\quad dv = \dfrac{1}{(x+1)^2}dx \quad \Rightarrow$

$du = (e^x + xe^x)dx, \quad v = -\dfrac{1}{x+1}.$

Então $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx = -\frac{xe^x}{(x+1)} + \int \frac{1}{(x+1)}(e^x + xe^x)dx =$

$\displaystyle -\frac{xe^x}{(x+1)} + \int e^x dx = \frac{e^x}{(x+1)} + C.$

c) Usando frações parciais : $\dfrac{2x^2}{x(x-1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{(x-1)} + \dfrac{C}{(x-1)^2}$

$\dfrac{2x^2}{x(x-1)^2} = \dfrac{(A+B)x^2 - (2A+B-C)x + A}{x(x-1)^2}$

Logo: A = 1, A+B = 2 e - 2A - B + C = 0 $\quad\Rightarrow\quad$ B = 1 e C = 3.
Portanto :

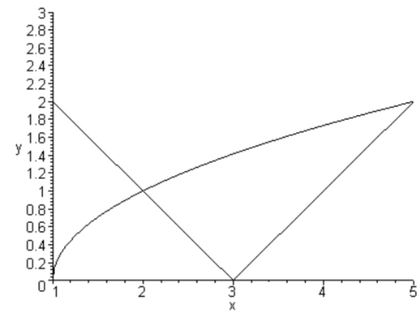
$$\int_2^3 \frac{(2x^2+1)}{x(x-1)^2}\,dx \quad = \quad \int \frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)} + \frac{3}{(x-1)^2}\,dx =$$
$$\ln|x| + \ln|x-1| - \frac{3}{(x-1)} + C.$$

2ª Questão:(1.5 pontos)

Considere R a região do plano limitada pelos gráficos de $f(x) = \sqrt{x-1}$ e $g(x) = \mid x-3 \mid$.

a)Faça um esboço da região R.

b)Determine a área de R.



Solução :

O ponto B tem coordenadas x=3 e $y = \sqrt{2}$.

Cálculo de A e C :

$\sqrt{x-1} = \mid x-3 \mid \Rightarrow \quad x-1 = (x-3)^2$

Portanto : A = (2,1) e C = (5,2).

Logo, a área $\mathcal{A}$ procurada será :

$\mathcal{A} = \int_2^5 \sqrt{x-1}\,dx \;-\; \int_2^3 (3-x)dx \;-\; \int_3^5 (x-3)\,dx$

$\mathcal{A} = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\,\Big|_2^5 + \frac{1}{2}(3-x)^2\,\Big|_2^3 - \frac{1}{2}(x-3)^2\,\Big|_3^5 = \frac{13}{6}.$

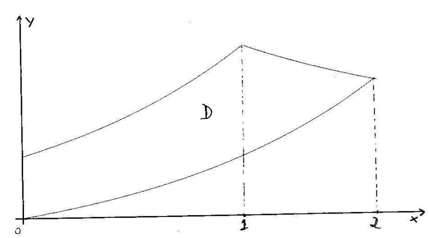
3ª Questão:(2 pontos)

Considere a região no primeiro quadrante do plano $\mathbb{R}^2$, definida por :

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \quad , \quad \dfrac{x^2}{8} \leq y \leq \dfrac{1}{x} \quad , \quad y \leq e^{x-1}\}.$

Veja esboço da região D ao lado.

Determine o Volume do sólido obtido ao girar a região D em tormo do eixo X.



Solução :

Os gráficos de $f(x) = e^{(x-1)}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x}$ se intersectam em $x = 1$. Os gráficos de $h(x) = \dfrac{x^2}{8}$ e $h(x) = \dfrac{1}{x}$ se intersectam em $x = 2$.

Assim, o volume pedido V vale : $V = \pi \left\{ \int_0^1 (e^{(x-1)})^2\,dx + \int_1^2 (\frac{1}{x})^2\,dx - \int_0^2 (\frac{x^2}{8})^2\,dx \right\} = \pi \left\{ \frac{9}{10} - \frac{1}{2e^2} \right\}.$

4ª Questão:(1.5 pontos)

O triângulo isósceles ABC situado na região **D** de $\mathbb{R}^2$ onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < \infty \quad, 0 \leq y\}$ e com vértice **A** na origem, tem sua base $\overline{BC}$ paralela ao eixo X. Os vértices **B** e **C** da base encontram-se sobre a curva $y = 27 - x^2$.

Determine a **maior** área que o triângulo ABC pode assumir. JUSTIFIQUE !

Solução :

A base do triângulo é $2x$, com $0 \leq x \leq \sqrt{27}$ e sua altura igual a $27 - x^2$. Assim, a área do triângulo será :

$\mathbf{A}(x) = \dfrac{1}{2}\, 2x\,(27 - x^2)\,, \quad 0 \le x \le \sqrt{27}.$
Derivando, obtemos :
$\mathbf{A}'(x) = 3(9 - x^2).$ Como para $x > 0$, $\mathbf{A}'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$, temos que P=(3,54) é o único ponto crítico de $\mathbf{A}(x)$ no intervalo $(0, \sqrt{27})$.
Derivando mais uma vez obtemos : $\mathbf{A}''(x) = -6x$, e para x=3 $\mathbf{A}''(x) = -18 < 0$, mostrando que P é um ponto de máximo local. Como para $x = 0$ ou $x = \sqrt{27} \Rightarrow \mathbf{A}'(x) = 0$ temos que $\mathbf{A}(3) = 54$ é o ponto de máximo procurado.

5ª Questão:(2.0 pontos)
Considere a função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por :

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + 2t} \quad dt.$$

Determine o comprimento de arco do gráfico da função f entre os pontos (0,f(0)) e (1,f(1)).

Solução :
O comprimento de arco entre os pontos (a,f(a)) e (x,f(x)) é dado por $L(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$.
Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, f'(x)=$\sqrt{x^2 + 2x}$. Assim, o comprimento do arco entre (0,f(0)) e (1,f(1)) é :

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + [\sqrt{x^2 + 2x}]^2}\, dx = \int_0^1 (x + 1)\, dx \;=\; \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 \;=\; \frac{3}{2}.$$