Universidade Federal do Rio de Janeiro
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Métodos Matemáticos

Gabarito da 2^a Prova Unificada de Cálculo I
Engenharia e Matemática
24/11/2008

1^a **Questão:** (2,5 pontos)

Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(3,5)$ e que forma com os eixos coordenados o triângulo com menor área do primeiro quadrante.

Uma reta r que passa pelo ponto $(3,5)$ tem equação $y = 5 + m(x-3)$, onde m é o coeficiente angular da reta. A área de um triângulo limitado pela reta e eixos coordenados, no primeiro quadrante, é dada pela metade do produto dos comprimentos da base e da altura do triângulo.
O comprimento b da base é encontrado pela interseção da reta r e do eixo coordenado $y = 0$: $b = 3 - \dfrac{5}{m}$.

O comprimento h da altura é encontrado pela interseção da reta r e do eixo coordenado $x = 0$: $h = 5 - 3m$.

Logo, queremos minimizar a função $A(m) = \dfrac{1}{2}\left(3 - \dfrac{5}{m}\right)(5-3m) = \dfrac{1}{2}\left(30 - 9m - \dfrac{25}{m}\right)$, onde $m < 0$.

Derivando $A(m)$, obtemos: $A'(m) = \dfrac{1}{2}\left(-9 + \dfrac{25}{m^2}\right)$ e $A'(m) = 0$, quando $m = \dfrac{5}{3}$ ou $m = -\dfrac{5}{3}$.

Para justificar que temos um mínimo para $A(m)$ quando $m = -\dfrac{5}{3}$, podemos calcular a derivada segunda de $A(m)$. Temos $A''(m) = \dfrac{(-50)}{2m^3} > 0$, para todo $m < 0$. Logo o gráfico de $A(m)$ tem a concavidade para cima neste intervalo e temos um mínimo para a área.

A equação da reta é dada por $y = 10 - \dfrac{5x}{3}$.

2^a **Questão:** (2 pontos)

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$ e $x = 3$, ao redor da reta $y = -1$. Esboce o sólido.

$$\int_1^3 \pi\left(\frac{1}{x}+1\right)^2 dx - \int_1^3 \pi 1^2\, dx = \int_1^3 \pi\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}\right) dx = \left(\frac{-1}{x} + 2\ln x\right)\Bigg|_1^3 =$$
$$= \pi\left[\left(-\frac{1}{3} + 2\ln 3\right) - (-1 + 2\ln 1)\right] = \pi\left(\frac{2}{3} + 2\ln 3\right).$$

3^a **Questão:** (3 pontos)

Calcule as integrais a seguir:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(6-x^2)^{3/2}}$

2. $\displaystyle\int \frac{t^2+1}{t^2-1}\,dt$

3. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln(\sqrt{x}))\,dx$

1. Fazendo a substituíção trigonométrica $x=\sqrt{6}\operatorname{sen}\theta$, obtemos:

$$\int \frac{dx}{(6-x^2)^{3/2}} = \int \frac{\sqrt{6}\cos\theta}{(6-6\operatorname{sen}^2\theta)^{3/2}}\,d\theta = \int \frac{\sqrt{6}\cos\theta}{(6)^{3/2}(\cos^2\theta)^{3/2}}\,d\theta =$$
$$= \frac{1}{6}\int \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{6}\int \sec^2\theta\,d\theta = \frac{1}{6}\operatorname{tg}\theta + C = \frac{\operatorname{sen}\theta}{6\cos\theta} + C = \frac{\frac{x}{\sqrt{6}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{6}}} + C =$$
$$= \frac{x}{6\sqrt{6-x^2}} + C$$

2. Resolvemos por frações parciais:

Temos $\displaystyle\frac{t^2+1}{t^2-1} = \frac{(t^2-1)+1+1}{t^2-1} = 1+\frac{2}{t^2-1}$,
onde $\displaystyle\frac{2}{t^2-1} = \frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1} = \frac{At-A+Bt+B}{t^2-1} = \frac{(A+B)t+(B-A)}{t^2-1}$.
Logo: $A=-1$ e $B=1$. Assim:

$$\int \frac{t^2+1}{t^2-1}\,dt = \int dt + \int \frac{-1}{t+1}\,dt + \int \frac{1}{t-1}\,dt = t-\ln(t+1)+\ln(t-1)+C\ .$$

3. Resolvemos por partes:

$$\int 1\ \operatorname{sen}(\ln(\sqrt{x}\,))\,dx = x\operatorname{sen}(\ln(\sqrt{x}\,)) - \int x\,\frac{\cos(\ln(\sqrt{x}\,))}{2x}\,dx =$$
$$= x\operatorname{sen}(\ln(\sqrt{x}\,)) - \frac{1}{2}\left[x\cos(\ln(\sqrt{x}\,)) - \int x\,\frac{(-\operatorname{sen}(\ln(\sqrt{x}\,)))}{2x}\,dx\right] =$$
$$= x\operatorname{sen}(\ln(\sqrt{x}\,)) - \frac{x\cos(\ln(\sqrt{x}\,))}{2} - \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}(\ln(\sqrt{x}\,))\,dx$$
Logo

$$\frac{5}{4}\int \operatorname{sen}(\ln(\sqrt{x}\,))\,dx = x\operatorname{sen}(\ln(\sqrt{x}\,)) - \frac{x\cos(\ln(\sqrt{x}\,))}{2}$$

e

$$\int \operatorname{sen}(\ln(\sqrt{x}\,))\,dx = \frac{4x\operatorname{sen}(\ln(\sqrt{x}\,))}{5} - \frac{2x\cos(\ln(\sqrt{x}\,))}{5} + C\ .$$

4^a **Questão:** (1,5 ponto)

Calcule a área da região entre as curvas $y=\dfrac{\operatorname{arcsen}x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x=0$ e $x=1$ e o eixo x.

Repare que a área é dada por uma integral imprópria:
$$\text{ÁREA} = \int_0^1 \frac{\operatorname{arcsen}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{h\to 1^-}\int_0^h \frac{\operatorname{arcsen}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Fazendo a substituição $u = \operatorname{arcsen} x$, obtemos:

$$\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int u\, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\operatorname{arcsen} x)^2}{2} + C\ .$$

Logo:

$$\text{ÁREA} = \int_0^1 \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \lim_{h\to 1^-} \left.\frac{(\operatorname{arcsen} x)^2}{2}\right|_0^h = \lim_{h\to 1^-} \frac{[(\operatorname{arcsen} h)^2 - (\operatorname{arcsen} 0)^2]}{2} = \frac{\pi^2}{8}\ .$$

5^a **Questão:** (1 ponto)

Calcule o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (\cos t)^{2008}\, dt}{x}\ .$$

Como $\lim_{x\to 0} \int_0^x (\cos t)^{2008}\, dt = 0$, ao tentar resolver o limite acima, encontramos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a regra de L'Hospital e o Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (\cos t)^{2008}\, dt}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x)^{2008}}{1} = 1\ .$$