INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Gabarito da 2ª Prova Unificada de Cálculo I

Engenharia, Matemática Aplicada e Ciência da Computação

30/06/2008

1ª Questão: (2.0 pts)

Para cada $x > 0$, seja R o retângulo com vértices nos pontos $A = (0, 0)$, $B = (x, 0)$, $C = (x, \mathrm{e}^{-x^2})$ e $D = (0, \mathrm{e}^{-x^2})$. Determine o valor de x para que a área de R seja máxima. Justifique.

Solução: Seja $A(x)$ a área do retângulo $ABCD$. Então $A(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$. Calculando os pontos críticos de $A(x)$:

$$A'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} - 2x^2\mathrm{e}^{-x^2} = \mathrm{e}^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

Portanto, $A'(x) = 0 \iff 1 - 2x^2 = 0 \iff |x| = \sqrt{2}/2$. Como A é derivável no domínio $(0, +\infty)$, o único ponto crítico é $x_0 = \sqrt{2}/2$.

Para concluir que x_0 é ponto de máximo, analisemos o crescimento de A. Então,

$$A'(x) > 0 \quad \iff \quad x < \sqrt{2}/2 \quad \text{e} \quad A'(x) < 0 \quad \iff \quad x > \sqrt{2}/2.$$

portanto, A é estritamente crescente no intervalo $(0, \sqrt{2}/2)$ e estritamente decrescente no intervalo $(\sqrt{2}/2, +\infty)$ e, conseqüentemente, $x_0 = \sqrt{2}/2$ é ponto de máximo global.

2ª Questão: (2.0 pts)

Calcule as integrais abaixo:

$$(1) \quad \int \frac{\arctan x}{1 + x^2}\, dx; \quad (2) \quad \int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^4}\, dx.$$

Solução: Podemos resolver a integral em (1) de três maneiras: por substituição, por partes ou por substituição trigonométrica:

a) Por substituição: $u = \arctan x \Rightarrow du = dx/(1 + x^2)$. Então,

$$\int \frac{\arctan x}{1 + x^2}\, dx = \int u\, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\arctan x)^2}{2} + C.$$

b) Por partes: $u = \arctan x$ e $dv = dx/(1 + x^2)$. Então $du = dx/(1 + x^2)$ e $v = \arctan x$. Portanto,

$$\int \frac{\arctan x}{1 + x^2}\, dx = (\arctan x)^2 - \int \frac{\arctan x}{1 + x^2}\, dx + C.$$

Assim,

$$2 \int \frac{\arctan x}{1 + x^2}\, dx = (\arctan x)^2 + C \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\arctan x}{1 + x^2}\, dx = \frac{(\arctan x)^2}{2} + C.$$

c) Por subs. trigonométrica: $x = \tan\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta\, d\theta$ e $\arctan x = \theta$. Portanto,

$$\int \frac{\arctan x}{1 + x^2}\, dx = \int \theta\, d\theta = \frac{\theta^2}{2} + C = \frac{(\arctan x)^2}{2} + C.$$

A integral em (2) pode ser resolvida por substituição trigonométrica: $x = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow dx = \cos\theta\, d\theta$. Assim,

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\, dx = \int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^4\theta}\, d\theta = \int \operatorname{cotg}^2\theta \operatorname{cossec}^2\theta\, d\theta.$$

Como a derivada de $\operatorname{cotg}\theta$ é $-\operatorname{cossec}\theta$, a substituição $u = \operatorname{cotg}\theta$ nos dá:

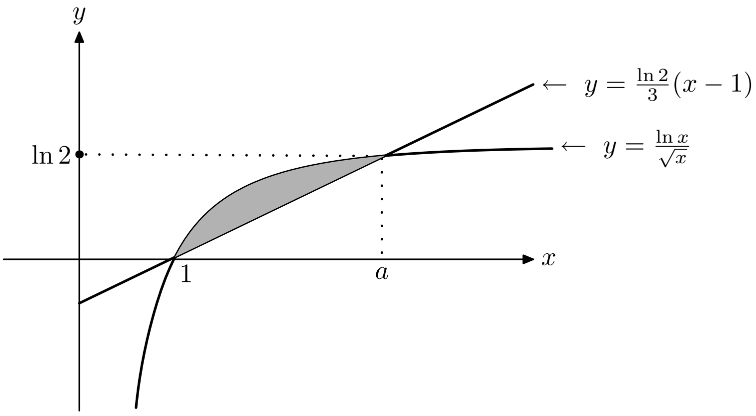
$$\int \operatorname{cotg}^2\theta \operatorname{cossec}^2\theta\, d\theta = -\int u^2\, du = \frac{u^3}{3} + C = -\frac{\operatorname{cotg}^3\theta}{3} + C = -\frac{1}{3}\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)^3 + C.$$

Portanto, voltando à variável x:

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\, dx = -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^3 + C.$$

3ª Questão: (2.0 pts)

Calcule a área da região sombreada na figura abaixo.



Solução: As duas curvas se interseptam nos pontos $(1,0)$ e $(a, \ln 2)$. Para determinar a, vemos pela equação da reta que $\ln 2 = (\ln 2/3)(a-1)$, isto é, $a = 4$.
Logo a área é

$$A = \int_1^4 \left[\frac{\ln x}{\sqrt{x}} - \frac{\ln 2}{3}(x-1)\right] dx = \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx - \int_1^4 \frac{\ln 2}{3}(x-1)\, dx.$$

A primeira integral do lado direito da igualdade acima pode ser calculada por partes: $u = \ln x$ e $dv = dx/\sqrt{x}$. Então, $du = 1/x$ e $v = 2\sqrt{x}$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx &= 2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^4 - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^4 - 4\sqrt{x}\Big|_1^4 \\ &= 4\ln 4 - 4.\end{aligned}$$

A segunda integral pode ser calculada facilemente por substituição simples: $u = x - 1 \Rightarrow du = dx$. Assim,

$$\int_1^4 \frac{\ln 2}{3}(x-1)\, dx = \frac{\ln 2}{3}\int_0^3 u\, du = \frac{3\ln 2}{2}.$$

Portanto, a área é:

$$A = 4(\ln 4 - 1) - 3\ln 2/2 = \frac{13\ln 2}{2} - 4.$$

4ª Questão: (2.5 pts)

Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando-se em torno do eixo x a região

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \mid x \geq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \right\}.$$

Solução: O sólido é obtido pela rotação em torno do eixo x da região ilimitada $\mathcal{R}$. Logo,

$$V = \int_1^\infty \pi f(x)^2 dx = \int_1^\infty \frac{\pi}{x^2(1+x^2)}\, dx = \lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{\pi}{x^2(1+x^2)}\, dx.$$

Calculemos a integral pelo método das frações parciais:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2}.$$

Efetuando a soma acima, obtemos

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B}{x^2(1+x^2)}.$$

Identificando os coeficientes nos numeradores, obtemos $B = 1$, $A = 0$, $C = 0$ e $D = -1$. Portanto,

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

e a integral se escreve como

$$\int_1^R \frac{\pi}{x^2(1+x^2)}\, dx = -\pi \left(\frac{1}{x} + \arctan x \right)\Big|_1^R = \pi - \frac{\pi}{R} + \frac{\pi^2}{4} - \pi \arctan R.$$

Passando ao limite, concluímos:

$$V = \lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{\pi}{x^2(1+x^2)}\, dx = \pi - \frac{\pi^2}{4}.$$

5ª Questão: (1.5 pts)

Determine uma função $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \geq 1$, a parte do gráfico entre os pontos $A = (1, f(1))$ e $B = (x, f(x))$ tenha comprimento $l(x)$ dado por

$$l(x) = \int_1^x \sqrt{1 + \frac{1}{4u}}\, du.$$

Esta função f é única? Justifique sua resposta.

Solução: Sabemos que se $y = f(x)$ tem derivada contínua, o comprimento da curva definida pelo seu gráfico entre os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é dado por:

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(u)^2}\, du.$$

Portanto, para todo $x > 1$ temos

$$\int_1^x \sqrt{1 + f'(u)^2}\, du = \int_1^x \sqrt{1 + \frac{1}{4u}}\, du.$$

Derivando a identidade acima em relação a x, segue do Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}, \quad \forall x > 1.$$

Logo, $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$ para todo $x > 1$ e, conseqüentemente, $f(x) = \sqrt{x} + C$. Como C pode ser qualquer número real, existe uma infinidade de funções satisfazendo a condição dada.