Universidade Federal do Rio de Janeiro
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Gabarito Primeira Prova Unificada de Cálculo 1 - 2013/2

Engenharia e Engenharia Química

1ª Questão: *Calcule:*

(1a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{4-x}-1}{\sqrt{12-x}-3}$, (1$b$) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1534}-x\right)$, (1$c$) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$.

(1d) $f'(x)$, *se* $f(x) = \sqrt{1+\ln\left(\sqrt{x}+1\right)}$, $x > 0$.

Solução:

(1a) Para eliminar a indeterminação, multiplicamos e dividimos numerador e denominador pelos respectivos “conjugados”. Então:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{4-x}-1}{\sqrt{12-x}-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{12-x}+3}{\sqrt{4-x}+1} = 3.$$

(1b) Analogamente,

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1534}-x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1534}{\sqrt{x^2+1534}+x} = 0.$$

(1c) Consideremos as funções

$$f(x) = \ln\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) \quad \text{e} \quad g(x) = x.$$

Como a função $y = \ln(x)$ é contínua, temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \ln\left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \ln(1) = 0.$$

Logo, podemos aplicar a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Calculando as derivas de f e g, temos:

$$f'(x) = \frac{x}{\operatorname{sen} x} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} \quad \text{e} \quad g'(x) = 1.$$

Então, aplicando a Regra de L'Hôpital, obtemos, se os limites existirem,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right) \lim_{x\to 0} \left(\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}\right).$$

Observe que o segundo limite no lado direito da expressão acima fornece a indeterminação $0/0$. Assim, aplicando novamente a Regra de L'Hôpital neste limite, obtemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right) \lim_{x\to 0} \left(\frac{-x\operatorname{sen} x}{2x}\right) = 1 \times 0 = 0.$$

(1d) Pela regra da cadeia, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\big(1+\ln(\sqrt{x}+1)\big)'}{2\sqrt{1+\ln(\sqrt{x}+1)}} = \frac{1/2\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+1)\sqrt{1+\ln(\sqrt{x}+1)}} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)\sqrt{1+\ln(\sqrt{x}+1)}}. \end{aligned}$$

2ª Questão: *Considere a função*

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}},$$

cujas derivadas primeira e segunda são, respectivamente,

$$f'(x) = \frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} \quad e \quad f''(x) = \frac{2x(9-x^2)}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^7}}.$$

Determinar quando aplicável:

- *a) o domínio máximo de f;*
- *b) as assíntotas verticais e horizontais de f;*
- *c) as regiões de crescimento e decrescimento de f;*
- *d) os pontos de máximo e de mínimo local e global de f;*
- *e) as regiões de concavidade para cima, para baixo e os pontos de inflexão de f;*
- *f) esboçar o gráfico de f.*

Solução:

(a) O domínio máximo de f é o subconjuntos de $\mathbb{R}$ para os quais $f(x) \in \mathbb{R}$. Como a expressão que define a função está bem definida para todos os números reais diferentes de -1 e 1, temos:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

(b) Analisemos as assíntotas verticiais:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty, \quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty,$$

Logo a função tem duas assíntotas verticais; as retas verticais que passam pelos pontos $x = -1$ e $x = 1$.

Analisemos as assítotas horizontais:

$$\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{x}{x^{2/3}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^{1/3}} = \frac{x^{1/3}}{\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^2}}}.$$

Assim,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{+\infty}{1} = +\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = \frac{-\infty}{1} = -\infty.$$

Logo, a função não possui assíntotas horizontais.

(c) Como o denominador $\sqrt[3]{(x^2-1)^4} \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, o sinal de $f'(x)$ é dado pelo sinal do numerador. Logo,

$$f'(x) \geq 0 \iff x^2 - 3 \geq 0 \iff x \geq \sqrt{3} \text{ ou } x \leq -\sqrt{3}.$$

Logo, a função cresce nos intervalos $(-\infty, -\sqrt{3}]$ e $[\sqrt{3}, +\infty)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} f'(x) \leq 0 &\iff x^2 - 3 \leq 0 \text{ e } x \notin \{-1, 1\} \\ &\iff x \in [-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3}]. \end{aligned}$$

Logo, a função decresce nos intervalos $[-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$ e $(1, \sqrt{3}]$.

(d) Como $f(x)$ tende a $\pm\infty$ em $x = 1$ (idem $x = -1$), a função não possui pontos de máximo e mínimo globais. Por outro lado, possui máximo e mínimo locais nos pontos onde muda o comportamento de crescimento. Assim, $x = \sqrt{3}$ é ponto de mínimo local e $x = -\sqrt{3}$ é ponto de máximo local.

(e) Para facilitar os estudo do sinal de $f''(x)$, vamos analisar o sinal do numerador e denominador, usando a tabela de sinais abaixo.

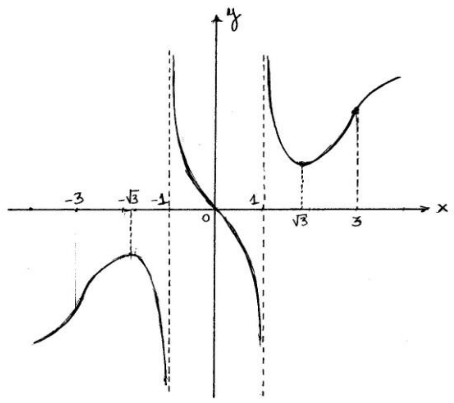
	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,\infty)$
$2x$	$-$	-6	$-$	-2	$-$	0	$+$	2	$+$	6	$+$
$9-x^2$	$-$	0	$+$	8	$+$	9	$+$	8	$+$	0	$-$
x^2-1	$+$	8	$+$	0	$-$	-1	$-$	1	$+$	8	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	∞	$+$	0	$-$	∞	$+$	0	$-$

Vê-se que a função é:

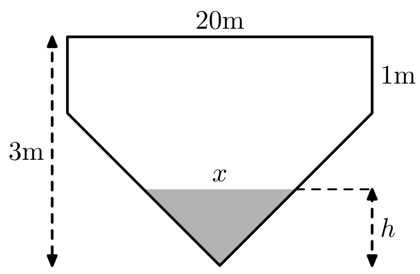
- convexa (concavidade para cima) nos intervalos $(-\infty, -3)$, $(-1, 0)$ e $(1, 3)$;
- côncava (concavidade para baixo) nos intervalos $(-3, -1)$, $(0, 1)$ e $(3, +\infty)$.

e os pontos de inflexão são: $x = -3$, $x = 0$ e $x = 3$.

(f) Esboço do gráfico:



3ª Questão: *Uma cisterna tem 10 m de largura, 20 m de comprimentro, 1 m de pro-fundidade nas extremidades e 3 m no meio, de modo que o fundo seja formado por dois planos inclinados (veja figura). Despeja-se água na cisterna a uma taxa de* $0,3\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$. *Seja h a altura do nível da água em relação à parte mais profunda. Com que velocidade (em metros por minuto) h estará subindo no instante em que* $h = 1$ *m?*



Solução:

Quando o nível da água está a uma latura h do ponto mais profundo, a sua superfície forma um retângulo de largura 10 m e comprimento x metros. Por semelhança de triângulos, temos

$$\frac{x}{h} = \frac{20}{2} = 10 \quad \Rightarrow \quad x = 10h.$$

Então, o volume de água é:

$$V = \frac{10xh}{2} = \frac{100h^2}{2} = 50h^2.$$

Sabemos que a água entra na cisterna a uma taxa constante

$$\frac{dV}{dt} = 0,3\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}.$$

Logo, em todo instante t, temos

$$\frac{3}{10} = \frac{dV}{dt} = 100h\frac{dh}{dt}.$$

No instante particular em que $h = 1$, obtemos

$$\frac{dh}{dt} = 0,003\,\mathrm{m}/\mathrm{min}.$$

1ª Questão: *Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 1$ e $f(2) = -1$, e seja $g(x) = x^2 + 3x + 2$. A função composta $h(x) = f(g(x))$ possui duas raízes negativas distintas. Determine intervalos abertos disjuntos contendo cada uma dessas raízes.*

Solução:

Observe inicialmente que

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\iff x = -1 \quad \text{ou} \quad x = -2; \\ g(x) = 2 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -3. \end{aligned}$$

Assim,

$$h(0) = f(g(0)) = f(2) = -1, \quad h(-1) = f(g(-1)) = f(0) = 1.$$

Como a composta de funções conínuas é uma função contínua, segue do Teorema do Valor Intermediário, que existe $x_0 \in (-1, 0)$ tal que $h(x_0) = 0$.
Observe agora que

$$h(-2) = f(g(-2)) = f(0) = 1, \quad h(-3) = f(g(-3)) = f(2) = -1.$$

Logo, existe $x_1 \in (-3, -2)$ tal que $h(x_1) = 0$.
Assim, os intervalos $(-3, -2)$ e $(-1, 0)$ são disjuntos e contêm respectivamente as raízes x_1 e x_0.