Questão 1: (3 pontos)

Calcule os limites abaixo. Justifique suas respostas.

(i) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2-1}$.

(ii) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$.

(iii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{x-\operatorname{sen} x}$.

Solução:

(i) Usando o limite fundamental, calculamos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2}\,.$$

(ii) Calculamos colocando os termos dominantes em evidência no denominador e no numerador. Após simplificar a fração, obtemos:

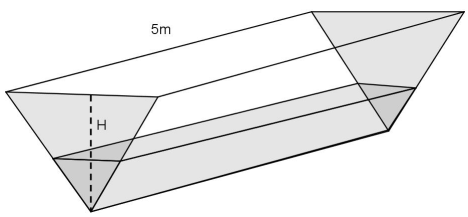
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2-3/x-4/x^2}{\sqrt{1+1/x^4}} = 2.$$

(iii) Usamos a regra de l'Hôpital três vezes e obtemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{x-\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}+2e^{-2x}-4}{1-\cos x} \lim_{x\to 0} \frac{4e^{2x}-4e^{-2x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{8e^{2x}+8e^{-2x}}{\cos x} = 16.$$

Questão 2: (2 pontos)

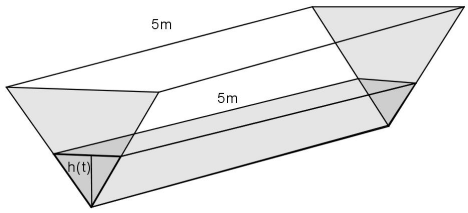
Um tanque tem $5\,m$ de comprimento e sua seção transversal é sempre um triângulo equilátero, conforme a figura abaixo. Está sendo bombeada água para o interior do tanque a uma taxa de $0,5\,m^3/min$. Com que velocidade o nível da água estará subindo quando o conteúdo de água no tanque estiver com $0,3\,m$ de profundidade?



Solução:

Seja $V(t)$ o volume da água dentro do tanque no instante de tempo t. Sabemos que $V'(t) = 0,5\,m^3/min$. No instante t a quantidade de água dentro do tanque ocupa um volume no formato de um prisma reto de comprimento $5\,m$ que tem como base um triângulo equilátero de altura

$h(t)$ (veja a figura). Assim, o volume $V(t)$ de água dentro do tanque no instante t é dado pela fórmula $V(t) = 5A(t)$, onde $A(t)$ é a área de um triângulo equilátero de altura $h(t)$, logo $A(t) = \dfrac{h^2(t)}{\sqrt{3}}$. Portanto, vale a igualdade: $V(t) = \dfrac{5}{\sqrt{3}}h^2(t)$. Derivando a igualdade anterior em relação ao tempo obtemos $0,5 = \dfrac{10}{\sqrt{3}}h(t)h'(t)$. Então, quando $h(t) = 0,3m$, temos que $h'(t) = \sqrt{3}/6 \approx 0,288\, m/min$.



Questão 3: (3 pontos)

Considere a função $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 12}{x + 3}$.

(**a**) Verifique que $f'(x) = \dfrac{x^2 + 6x}{(x+3)^2}$ e que $f''(x) = \dfrac{18}{(x+3)^3}$.

(**b**) Ache as assíntotas horizontais e verticais caso existam.

(**c**) Identifique os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente.

(**d**) Encontre os valores máximo e mínimo locais e/ou globais caso existam.

(**e**) Identifique os intervalos de concavidade para cima e para baixo e os pontos de inflexão.

(**f**) Usando as informações anteriores faça um esboço do gráfico de $y = f(x)$.

Solução:

(**a**) De fato, temos que a primeira derivada é :

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(x+3) - (x^2 - 4x - 12)}{(x+3)^2} = \frac{2x^2 + 6x - 4x - 12 - x^2 + 4x + 12}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2}.$$

Derivando de novo, vem:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x+6)(x+3)^2 - (x^2+6x)2(x+3)}{(x+3)^4} = \frac{(2x+6)(x+3) - 2(x^2+6x)}{(x+3)^3} \\ &= \frac{2x^2 + 6x + 6x + 18 - 2x^2 - 12x}{(x+3)^3} = \frac{18}{(x+3)^3}, \end{aligned}$$

como queriámos.

(**b**) Temos que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

logo não há assíntotas horizontais.

No entanto
$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = +\infty \quad e \lim_{x\to -3^-} f(x) = -\infty,$$
pois $x^2-4x-12=(x-6)(x+2)>0$ perto de $x=-3$ e, além disso, $x+3>0$ se $x>-3$ e $x+3<0$ se $x<-3$.

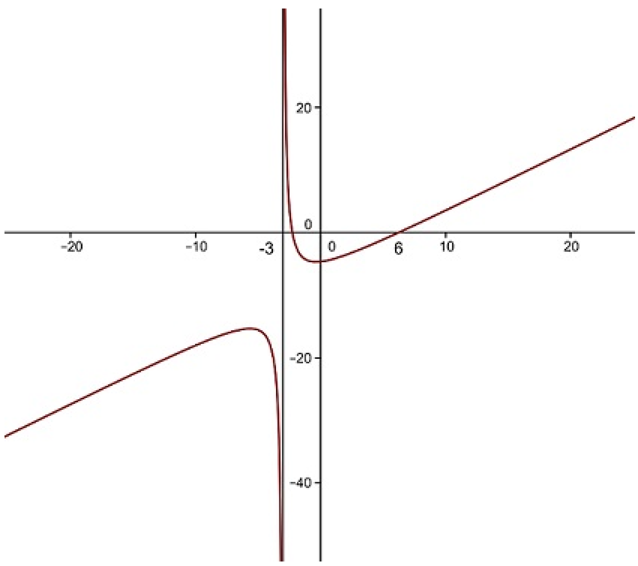
Temos, portanto, uma assíntota vertical em $x=-3$.

(**c**) Analisemos o sinal de f'. Temos: $f'(x)=\dfrac{x(x+6)}{(x+3)^2}$. O sinal da derivada é, portanto, determinado pelo sinal do numerador pois o denominador é sempre não negativo. Teremos, então,
$$f'>0 \text{ se } x<-6 \text{ ou } x>0; \quad \text{e} \quad f'<0 \text{ se } -6<x<-3 \text{ ou } -3<x<0.$$
Logo f é crescente em $(-\infty,-6)\cup(0,+\infty)$ e f é decrescente em $(-6,-3)\cup(-3,0)$.

(**d**) A derivada de f se anula em $x=-6$ e em $x=0$, e muda de sinal em torno desses pontos. Pelo Teste da Primeira Derivada temos:
$$x=-6 \text{ é ponto de máximo local e } x=0 \text{ é ponto de mínimo local.}$$
Não há valores extremos globais pois a função tem limites infinitos em infinito e em $x=-3$.

(**e**) O sinal da segunda derivada é o mesmo que o sinal do termo $x+3$. Assim,
$$f''>0 \text{ se } x>-3; \quad \text{e} \quad f''<0 \text{ se } x<-3.$$
A concavidade é , portanto, para cima se $x>-3$ e para baixo se $x<-3$.

(**f**) Gráfico da função f:



Questão 4: (2 pontos)

(**a**) Ache a derivada da função $g(x)=e^{\cos(x^3)}$.

(**b**) Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^3}\right), & \text{se } x > 0, \\ \cos x - A, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$

Encontre A de modo que a função f seja contínua em $x = 0$. Para esse valor de A determine se f é derivável em $x = 0$. Justifique suas respostas.

Solução:

(**a**) Usando a Regra da Cadeia, obtemos

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\cos(x^3)}\right) = e^{\cos(x^3)} \frac{d}{dx}\left(\cos(x^3)\right) = e^{\cos(x^3)}(-\operatorname{sen}(x^3))3x^2.$$

(**b**) Para que f seja contínua em $x = 0$ devemos ter

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

Vamos primeiramente calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^3}\right)$. Temos que $-1 \leq \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^3}\right) \leq 1$ para $x > 0$. Multiplicando a desigualdade por $x^2 \geq 0$, obtemos $-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^3}\right) \leq x^2$ para todo $x > 0$. Como $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(-x^2) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$, segue do Teorema do Confronto que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0$.

Por outro lado, como a função $h(x) = \cos x - A$ é contínua em $x = 0$, temos que

$$\lim_{x\to 0^-}(\cos x - A) = h(0) = \cos(0) - A = 1 - A.$$

Portanto, para que f seja contínua em $x = 0$, devemos escolher $A = 1$.

Quando $A = 1$ temos $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x^3}), & \text{se } x > 0, \\ \cos x - 1, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$

Lembramos que a função f é derivável em $x = 0$ se e somente se o limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ existe. Vamos primeiramente calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Temos que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - 1 - 0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\operatorname{sen} x}{1} = -\operatorname{sen}(0) = 0.$$

Por outro lado, temos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^3}\right)}{x} = \lim_{x\to 0^+} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Analogamente, temos $-x \leq x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^3}\right) \leq x$ para todo $x > 0$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(-x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$. Segue do Teorema do Confronto que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0$. Finalmente, como $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, concluimos que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ existe ou em outras palavras f é derivável em $x = 0$ e $f'(x) = 0$.