Questão 1. (2,0 pontos)

(a) Encontre todos os pontos (x, y) sobre a curva $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 8$ nos quais a reta tangente é paralela à reta $y + x = 1$.

(b) Seja $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{\beta\, x+1}\right)$. Ache a constante $\beta \in \mathbb{R}$ de modo que $f'(1) = \frac{1}{2}$.

Solução.

a Derivando ambos os membros da equação $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 8$ implicitamente em relação a x, temos que

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0 \ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

Nos pontos onde a reta tangente à curva é paralela à reta $y = -x + 1$, devemos ter $\dfrac{dy}{dx} = -1$. Assim,

$$-\sqrt[3]{\frac{y}{x}} = -1 \Longleftrightarrow x = y.$$

Substituindo y por x em $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 8$, temos que

$$x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = 8 \Longleftrightarrow 2x^{\frac{2}{3}} = 8 \Longleftrightarrow x = -8 \text{ ou } x = 8$$

Portanto, os pontos desejados são $(-8, -8)$ e $(8, 8)$.

(b) Aplicando a regra da cadeia e a regra do quociente para $f(x)$, temos que sua derivada é

$$f'(x) = \frac{\beta x+1}{x^2+1}\left[\frac{2x(\beta x+1) - \beta(x^2+1)}{(\beta x+1)^2}\right] = \frac{2x(\beta x+1) - \beta(x^2+1)}{(\beta x+1)(x^2+1)}$$
$$= \frac{2x}{x^2+1} - \frac{\beta}{\beta x+1}.$$

Portanto, $f'(1) = 1 - \dfrac{\beta}{\beta+1}$. Assim, para termos $f'(1) = \dfrac{1}{2}$, é necessário termos

$$1 - \frac{\beta}{\beta+1} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{\beta}{\beta+1} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 2\beta = \beta + 1 \Longleftrightarrow \beta = 1$$

Logo, β deve ser igual a 1.

Questão 2. (3,0 pontos)

(a) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen}(x)}$.

(b) Determine o valor de A para que a função

$$f(x) = \begin{cases} A, & \text{se } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ x\tan(x) - \dfrac{\pi}{2\cos x}, & \text{se } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

seja contínua em $(0, \frac{3\pi}{2})$.

Solução.

(a) Observe que não podemos aplicar a Regra de L' Hospital, pois $\lim\limits_{x\to 0} \cos(1/x)$ não existe. No entanto, podemos usar o Teorema do Confronto e o limite fundamental para resolver o item. Note que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen}\, x} = \lim_{x\to 0}\left[x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x}{\operatorname{sen}\, x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\, x}{x}}\right].$$

Como $-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ para todo $x \neq 0$, temos que

$$x \leq x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq -x, \text{ se } x < 0$$

e

$$-x \leq x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x, \text{ se } x > 0.$$

Daí, como $\lim\limits_{x\to 0^-} x = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} -x$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} -x$, segue do Teorema do confronto que

$$\lim_{x\to 0^-} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

o que implica que $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Finalment, como $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\, x}{x} = 1$, temos que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\, x}{x}} = 1$ e, portanto, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen}\, x} = 0$.

(b) Como A é uma constante real, e $f(x) = A$ para todo $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, temos que f é contínua em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Por outro lado,

$$f(x) = \frac{x \operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{\pi}{2\cos x} = \frac{2x \operatorname{sen} x - \pi}{2\cos x}$$

para todo $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Daí, como $x \operatorname{sen} x - \pi$ e $\cos x$ são funções contínuas com $\cos x \neq 0$ em $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, temos que f é contínua em $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Logo, para que f seja contínua em $(0, \frac{3\pi}{2})$ precisamos apenas que f seja contínua em $x = \frac{\pi}{2}$, isto é,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = A.$$

Como $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = A$, por definição, resta apenas

$$A = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{2x\operatorname{sen} x - \pi}{2\cos x}.$$

O último limite é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando L' Hospital,

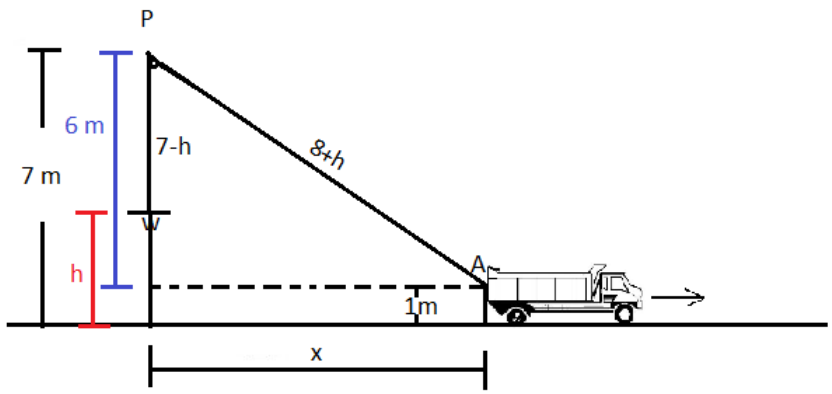
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{2x\operatorname{sen} x - \pi}{2\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{2\operatorname{sen} x + 2x\cos x}{-2\operatorname{sen} x} = -1$$

Portanto, para que f seja contínua, precisamos ter $A = -1$.

Questão 3. (2,0 pontos)

Uma placa de aço W (com espessura desprezível) está presa a uma corda, com 15 m de comprimento, que passa por uma polia P, situada 7 m acima do solo. A outra extremidade da corda situada em A está presa a um caminhão, 1 m acima do solo. Sabendo que o caminhão se afasta a uma velocidade de 5 m/s, qual a taxa de variação da altura da placa quando ela estiver 2 m acima do solo?

Solução Seja h a distância de W ao chão. Temos que a distância de P a W é então $7-h$. Daí, como a corda mede 15 m, temos que a distância de P a A é $15-(7-h) = 15-7+h = 8+h$. Seja x a distância horizontal de A a P. Como sabemos que o caminhão se move a uma velocidade de 5 m/s, temos que $\dfrac{dx}{dt} = 5$ m/s. Queremos descobrir $\dfrac{dh}{dt}$ no momento em que $h = 2$ m. Logo, como conhecemos $\dfrac{dx}{dt}$, vamos relacionar x com h. A distância vertical de P a A é constante igual a 6 m.



Segue do Teorema de Pitágoras que $x^2 + 6^2 = (8 + h)^2$. Derivando ambos os membros desta igualdade em relação a t, temos que $2x\dfrac{dx}{dt} = 2(8+h)\dfrac{dh}{dt}$. Quando $h = 2$ m, temos que $x^2 + 6^2 = (8 + 2)^2$ o que implica que $x^2 = 100 - 36 = 64$ e, portanto, $x = 8$ m. Tomando $x = 8$, $h = 2$ e substituindo $\dfrac{dx}{dt}$ por 5 na equação $2x\dfrac{dx}{dt} = 2(8+h)\dfrac{dh}{dt}$, temos que $2 \cdot 8 \cdot 5 = 2(8+2)\dfrac{dh}{dt}$. Logo, $20\dfrac{dh}{dt} = 80$ e, portanto, $\dfrac{dh}{dt} = 4$ m/s.

Questão 4. (3,0 pontos)

Considere a função definida por $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$. Determine, justificando:

1. O domínio de f e as assíntotas horizontais e verticais, caso existam.
2. Os intervalos onde f é crescente e onde f é decrescente e os pontos de máximo e de mínimo relativos, caso existam.
3. Os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo e os pontos de inflexão, caso existam.
4. O esboço do gráfico de f e os extremos absolutos, caso existam.

- **Solução.**

  1. A função está bem definida para todo $\mathbb{R}$ exceto para $x = 1$. Logo,

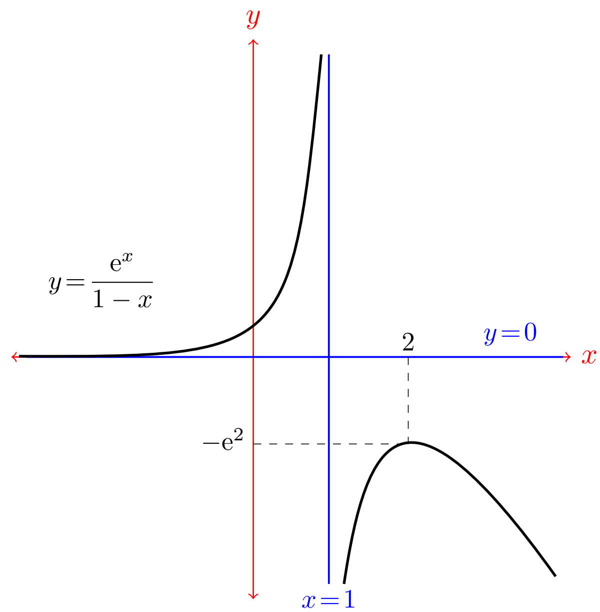
$$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Além disso,
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1-x} = 0$$
e, usando a regra de L'Hospital, temos que
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{-1} = -\infty.$$
Logo, a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f. Estudando o sinal de f, obtemos que
$$\lim_{x\to1^-} \frac{e^x}{1-x} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to1^-} \frac{e^x}{1-x} = +\infty.$$
Logo, a reta $x = 1$ é uma assíntota vertical do gráfico de f.

2. Temos que $f'(x) = \dfrac{e^x(2-x)}{(1-x)^2}$. Logo, o ponto crítico de f é $x = 2$. Note que $x = 0$ não é um ponto crítico, pois a função f não está definida nesse ponto. Estudando o sinal de f' obtemos que:
   - $f'(x) > 0$, para todo $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2)$. Logo, f é crescente no intervalo $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$.
   - $f'(x) < 0$, para todo $x \in (2, +\infty)$. Logo, f é decrescente no intervalo $(2, +\infty)$.

   Segue do teste da primeira derivada que f possui um máximo local em $x = 2$ com $f(2) = -e^2$.
3. Temos que
$$f''(x) = \frac{e^x(x^2 - 4x + 5)}{(1-x)^3}.$$
   Como $e^x > 0$ e $x^2 - 4x + 5 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que f'' tem o mesmo que $(1 - x)$. Portanto,
   - $f''(x) > 0$, para todo $x \in (-\infty, 1)$. Logo, f tem concavidade para cima no intervalo $(-\infty, 1)$.
   - $f''(x) < 0$, para todo $x \in (1, +\infty)$. Logo, f tem concavidade para baixo no intervalo $(1, +\infty)$.

   Consequentemente, f não possui nenhum ponto de inflexão.
4. Esboço do gráfico.



Finalmente, podemos concluir do gráfico que o ponto $(2, -e^2)$ é apenas um ponto de máximo local.