UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Matemática
PRIMEIRA PROVA UNIFICADA – CÁLCULO I
POLITÉCNICA E ENGENHARIA QUÍMICA 11/10/2011.

GABARITO

1ª Questão. (*2.5 pontos*). Responder

1. Calcule os seguintes limites

$$(a)\quad \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{1-x}-\frac{1}{\ln(x)}\right) \qquad\qquad (b)\quad \lim_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})}.$$

2. Considere as funções $h(x)=(x-1)^2$ e $g(x)=-(x-1)^2$. Seja $f(x)$ uma função definida para toda a reta e que satisfaz $g(x)\le f(x)\le h(x)$ para todo x real.
   (a) Prove que $f(x)$ é contínua em $x=1$.
   (b) Dê um exemplo de uma tal função $f(x)$ que não seja diferenciável em $x=-2$.

- **Solução.**

1. (a) Para resolver isto podemos fazer

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{1-x}-\frac{1}{\ln(x)}\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x(\ln(x)+1)-1}{(1-x)\ln(x)}\right).$$

Assim, obtemos a indeterminação 0/0. Logo, pela regra de L'Hôspital, temos

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x(\ln(x)+1)-1}{(1-x)\ln(x)}\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{(2+\ln(x))x}{(1-x)-x\ln(x)}\right) = -\infty \qquad \text{(não existe).}$$

(b) Temos a indeterminação 1^∞. Neste caso podemos fazer

$$(2-x)^{\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})} = e^{\ln\left[(2-x)^{\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})}\right]} = e^{\left[\frac{\ln(2-x)}{\operatorname{cotg}(\frac{\pi x}{2})}\right]}.$$

Logo, como a função exponencial é contínua, então

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{\ln(2-x)}{\operatorname{cotg}(\frac{\pi x}{2})}\right]}, \qquad (1)$$

onde aparece a indeterminação 0/0. Logo, usando L'Hôspital podemos concluir que

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{\ln(2-x)}{\operatorname{cotg}(\frac{\pi x}{2})}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{\frac{-1}{(2-x)}}{-\frac{\pi}{2}\operatorname{cossec}^2(\frac{\pi x}{2})}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{2\operatorname{sen}^2(\frac{\pi x}{2})}{\pi(2-x)}\right] = \frac{2}{\pi}.$$

Portanto, substituíndo em (1), temos

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})} = e^{(2/\pi)}.$$

2. (a) A função $f(x)$ está definida em todo $\mathbb{R}$, logo está bem definida em $x = 1$. Além disso, temos por hipótese

$$-(x-1)^2 \;\leq\; f(x) \;\leq\; (x-1)^2.$$

Logo, pelo Teorema do Confronto, $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$. Mais ainda, para $x = 1$ a desigualdade anterior implica que $f(1) = 0$. Portanto,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1), \quad \text{isto é, } f(x) \text{ é contínua em } x = 1.$$

(b) Existem vários exemplos, entre eles podemos escolher

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 0 & , \; x \geq -2 \\ 1 & , \; x < -2 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad f(x) \;=\; \begin{cases} 0 & , \; x \geq -2 \\ -x-2 & , \; x < -2 \end{cases}$$

2ª Questão. (*2.5 pontos*). Responder

1. Seja $P = (x_0, 2)$ um ponto da curva $xy^3 + y + 2x^2 = 26$ localizado no primeiro quadrante. Determine o ponto P e a equação da reta normal ao gráfico de f naquele ponto.
Nota: *Define-se reta normal ao gráfico de uma função $y = f(x)$ num ponto P, como aquela reta que é perpendicular à reta tangente à curva $y = f(x)$ naquele ponto.*

2. Dada a função $f(x) = 2\text{arctg}(x) + \text{arcsen}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.
   (a) Encontre $f'(x)$.
   (b) Mostre que $f(x)$ é constante para todo $x > 1$ e determine o valor desta constante.

- **Solução.**

1. Sabemos que o ponto $P = (x_0, 2)$ pertence à curva. Logo, substituindo temos que $8x_0 + 2 + 2x_0^2 = 26$, com raizes $x_0 = 2$ e $x_0 = -6$. Mas, por hipótese P está no primeiro quadrante, logo $P = (2, 2)$. Além disso, derivando implicitamente, temos

$$y^3 + 3xy^2y' + y' + 4x = 0 \qquad \text{isto é} \qquad y' = -\frac{4x + y^3}{3xy^2 + 1}.$$

Logo, em P devemos ter $y'(2) = -\dfrac{16}{25}$. Então a inclinação da reta tangente à curva em P é $m = -\dfrac{16}{25}$. Assim, a inclinação da reta normal será $m_1 = \dfrac{25}{16}$, pois devemos ter $m.m_1 = -1$. Finalmente, a equação da reta normal à curva que passa por P será dada pela equação $y = \dfrac{25}{16}(x-2) + 2$.

2. (a) Primeiro note que

$$y = \text{arctg}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \text{tg}(y) = x.$$

Derivando a segunda expressão em relação a x e sabendo que $1+\text{tg}^2(y) = \sec^2(y)$, teremos

$$\sec^2(y)y' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\text{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}. \tag{2}$$

Analogamente

$$y = \text{arcsen}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \text{sen}(y) = x,$$

logo, usando $\text{sen}^2(y) + \cos^2(y) = 1$, teremos

$$\cos(y)y' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\text{arcsen}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{3}$$

Finalmente, usando a regra da cadeia e as equações (2)-(3) teremos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' \\
&= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}}\left(\frac{2(1+x^2)-2x(2x)}{(1+x^2)^2}\right) \\
&= \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)},
\end{aligned}$$

isto é

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}. \qquad (4)$$

(b) Para mostrar que $f(x)$ é constante, basta ver que $f'(x) = 0$ para todo $x > 1$. De fato, como $x > 1$, temos que $|1-x^2| = -(1-x^2)$. Logo, substituíndo na fórmula de $f'(x)$ dada em (4), teremos que

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} = 0.$$

Assim, $f(x) = c$ para todo $x > 1$, onde c é uma constante. Para determinar o valor de c, note que a função $f(x)$ está bem definida e é contínua para $x > 1$, em particular para $x = \sqrt{3}$

$$f(\sqrt{3}) = 2\text{arctg}(\sqrt{3}) + \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{3}\right) = \pi.$$

Logo $f(x) = \pi$ para todo $x > 1$.

3ª Questão. (*3.0 pontos*). Dada a função $f(x) = \dfrac{4}{x} - \dfrac{4}{x^2}$. Determine, justificando:

1. O domínio de f e as assíntotas horizontais e verticais, caso existam.
2. Os intervalos onde f é crescente e onde f é decrescente e os pontos de máximos e de mínimos relativos, caso existam.
3. Os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo e os pontos de inflexão, caso existam.
4. O esboço do gráfico de f e os extremos absolutos, caso existam.

- **Solução.**

1. A função está bem definida em todo $\mathbb{R}$ exceto para $x = 0$, logo

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Além disso, note que (usando L'Hôspital)

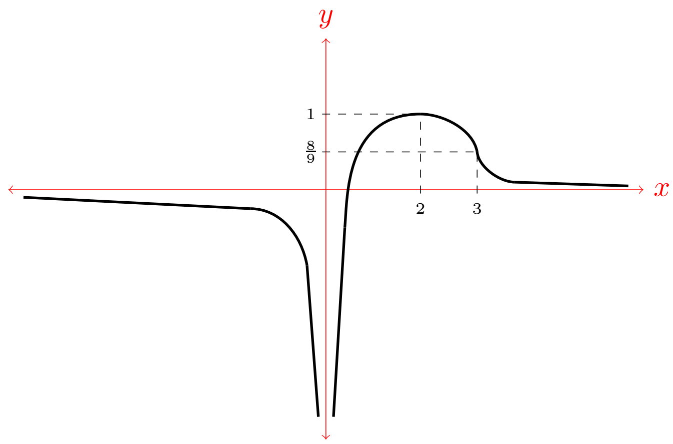
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} 4\left(\frac{x-1}{x^2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x}\right) = 0.$$

Logo, a reta $y = 0$ é uma assíntotal horizontal ao gráfico de $f(x)$. Também temos que

$$\lim_{x\to 0^\pm}\left(\frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^\pm} 4\left(\frac{x-1}{x^2}\right) = -\infty.$$

Logo, a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de $f(x)$.

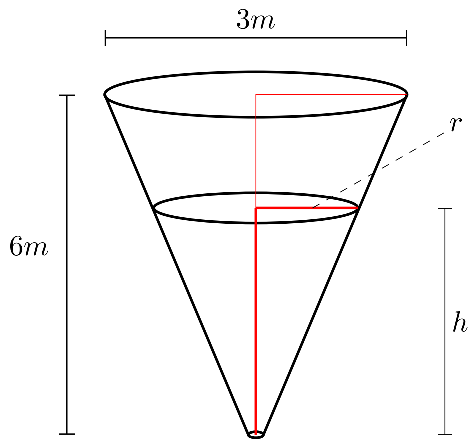
2. Derivando temos que $f'(x) = 4\left(\dfrac{2-x}{x^3}\right)$, logo o ponto crítico de f é $x = 2$. Lembre que em $x = 0$ a função não está definida. Estudando o sinal de $f'(x)$ deduzimos que:
   - $f'(x) > 0$ em $(0, 2)$, logo f é crescente no intervalo $(0, 2)$.
   - $f'(x) < 0$ em $(-\infty, 0)$ e em $(2, +\infty)$, logo f é decrescente nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(2, +\infty)$.
   - Logo, pelo teste da derivada primeira, podemos concluir que f possui um máximo local em $x = 2$.
   - Máximo local : $f(2) = 1$.
3. Para estudar a concavidade, note que $f''(x) = 8\left(\dfrac{x-3}{x^4}\right)$. Estudando o sinal de $f''(x)$ deduzimos que:
   - $f''(x) > 0$ em $(3, +\infty)$, logo f é côncava para cima no intervalo $(3, +\infty)$.
   - $f''(x) < 0$ em $(-\infty, 0)$ e em $(0, 3)$, logo f é côncava para baixo nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, 3)$.
   - f possui um ponto de inflexão em $x = 3$. O ponto de inlfexão é: $(3, \frac{8}{9})$.
4. Esboço do gráfico.



Finalmente, podemos concluír do gráfico que o ponto $(2, 1)$ é um ponto de máximo absoluto.

4ª Questão. (*2.0 pontos*). Dentro de um tanque na forma de um cone invertido está entrando água à razão de $8\mathbf{m^3/min}$. O cone tem $6\mathbf{m}$ de altura e $3\mathbf{m}$ de diâmentro no topo. Suponha que haja um vazamento na base e que o nível de água está subindo a uma razão de $1\mathbf{cm/min}$. A que taxa estará escoando o vazamento quando o nível da água for de $4,8\mathbf{m}$?

- **Solução.**



Sejam $h = h(t)$ o nível da água no tanque e $r = r(t)$ o raio da circunferência formada pela superfície da água no tanque (como no gráfico acima). Logo, teremos que o volume de água no tanque $V = V(t)$ será dado pela fórmula

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h. \tag{5}$$

Além disso, por semelhança de triângulos, temos

$$\frac{r}{h} = \frac{1,5}{6} \Rightarrow r = \frac{h}{4}.$$

Substituindo em (5):

$$V = \frac{\pi}{48}h^3 \qquad \Rightarrow \qquad V' = \frac{\pi}{16}h^2 h'. \tag{6}$$

Além disso, a variação da água no tanque, V', depende da vazão da água que está entrando e da vazão que está saindo, isto é,

$$V' = V'_e - V'_s,$$

onde $V'_e = V'_e(t)$ é vazão de entrada de água no tanque e $V'_s = V'_s(t)$ é vazão de saída de água no tanque. Substituindo em (6) teremos

$$V'_e - V'_s = \frac{\pi}{16}h^2 h' \qquad \Rightarrow \qquad V'_s = V'_e - \frac{\pi}{16}h^2 h'.$$

Assim, no instante em que $h = 4,8m$, por hipótese temos que $h' = 1cm/min = \frac{1}{100}m/min$ e $V'_e = 8m^3/min$. Substituindo estes dados, teremos que a taxa de escoamento da água V'_s será

$$V'_s = \left(8 - \frac{\pi}{16(100)}(4,8)^2\right) m^3/min.$$