Universidade Federal do Rio de Janeiro
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Métodos Matemáticos

Gabarito da 1^a Prova Unificada de Cálculo I - Politécnica e Engenharia Química
10/05/2011

1^a **Questão:** (3,0 pontos) **Nesta questão, não use a regra de L'Hospital.**

1. Calcule os limites:
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5-3x^3+2x^2-1}{3x^5-4x+1}$
   (b) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\text{arctg}\,[(1+h)^2+1]-\text{arctg}\,2}{h}$ (dica: você reconhece alguma derivada?)
2. Dê o valor de A para que a função f abaixo seja contínua em $x=0$:

$$f(x)=\begin{cases} e^{\left[\left(\frac{\text{sen}x}{x}-1\right)^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]} & , \ x\neq 0 \\ A & , \ x=0. \end{cases}$$

Solução.

1. (a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5-3x^3+2x^2-1}{3x^5-4x+1} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^5\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^5}\right)}{x^5\left(3-\frac{4}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)} \\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^5}\right)}{\left(3-\frac{4}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

   (b) Seja $g(x)=\text{arctg}\,(x^2+1)$. Temos que

$$g'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{\text{arctg}\,[(1+h)^2+1]-\text{arctg}\,[1^2+1]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\text{arctg}\,[(1+h)^2+1]-\text{arctg}\,2}{h}.$$

   Portanto, o limite procurado é igual a $g'(1)$. Derivamos g usando a regra da cadeia, obtendo

$$g'(x)=\frac{2x}{1+(x^2+1)^2}.$$

   Logo,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\text{arctg}\,[(1+h)^2+1]-\text{arctg}\,2}{h}=g'(1)=\frac{2}{1+(1^2+1)^2}=\frac{2}{5}\ .$$

2. Para que f seja contínua em $x=0$ devemos ter

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=A.$$

   Vamos primeiramente calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\text{sen}\,x}{x}-1\right)^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$. Temos que

$$-1\leq\cos\left(\frac{1}{x}\right)\leq 1,$$

para qualquer $x \neq 0$. Multiplicando a desigualdade por $\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right)^2 \geq 0$, obtemos

$$-\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right)^2 \leq \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right)^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right)^2,$$

para todo $x \neq 0$. Como

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right)^2 = (1-1)^2 = 0,$$

segue do Teorema do sanduíche que

$$\lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right)^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0.$$

Usando a continuidade da função exponencial, temos que

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\left[\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right)^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

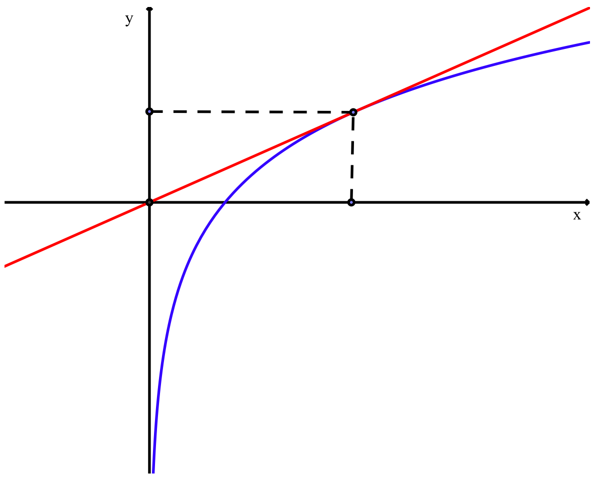
Portanto, devemos ter $A = 1$.

2^a **Questão:** (2,5 pontos)

1. Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = \ln x$ que passe pelo ponto $(0,0)$.
2. Encontre a e b de modo que as retas tangentes aos gráficos de $y = \dfrac{x^2 + ax + b}{x+1}$ e $y = \sqrt{2x+1}$ no ponto $P = (0,1)$ sejam perpendiculares.

Solução.

1. Em primeiro lugar observe que o ponto $(0,0)$ não pertence à curva $y = \ln x$.
   Seja então $(a, \ln a)$ o ponto de tangência, conforme indicado na figura abaixo.



O coeficiente angular da reta tangente é o valor da derivada de $y = \ln x$ em $x = a$, ou seja, $1/a$. Por outro lado, como a tangente passa pelos pontos $(0,0)$ e $(a, \ln a)$ seu coeficiente angular é também dado por $\dfrac{\ln a - 0}{a - 0} = \dfrac{\ln a}{a}$. Logo, $\dfrac{\ln a}{a} = \dfrac{1}{a}$ e, portanto, $a = e$.
Sendo assim, a reta tangente tem coeficiente angular $1/e$ e equação $y = x/e$.

2. Para que o ponto $P = (0, 1)$ esteja no gráfico $y = \dfrac{x^2 + ax + b}{x + 1}$, é necessário que $b = 1$ (substitua $x = 0$ na expressão!).
Para achar as inclinações das retas tangentes, vamos derivar as duas funções. Primeiro, usando a regra do quociente, temos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 + ax + 1}{x + 1}\right) = \frac{(2x + a)(x + 1) - (x^2 + ax + 1)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x + (a - 1)}{(x + 1)^2}.$$

Logo, a inclinação da reta tangente ao gráfico $y = \dfrac{x^2 + ax + 1}{x + 1}$ no ponto $(0, 1)$ é igual à $a - 1$. Agora, usando a regra da cadeia, temos

$$\frac{d}{dx}\sqrt{2x + 1} = \frac{2}{2\sqrt{2x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}.$$

Logo, a inclinação da reta tangente à curva $y = \sqrt{2x + 1}$ no ponto $(0, 1)$ é igual a 1. Portanto, para que as retas tangentes sejam perpendiculares, é necessário que

$$a - 1 = -1 \Leftrightarrow a = 0.$$

3^a **Questão:** (3 pontos) Considere a função definida por $f(x) = |x|(x^3 - 2x)$, que possui derivada $f'(x) = |x|(4x^2 - 4)$. Determine, caso existam:

1. O domínio e os zeros de $f(x)$;
2. As assíntotas verticais e horizontais;
3. Os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente;
4. Os valores de máximo e mínimo locais e/ou absolutos;
5. Os intervalos onde $f(x)$ seja côncava para baixo e côncava para cima e os pontos de inflexão;

Use as informações anteriores para fazer um esboço do gráfico de f.

Solução

1. O domínio de $f(x)$ é o conjunto dos números reais.
Como $f(x) = |x|x(x^2 - 2)$, temos $f(x) = 0$ quando $x = 0$ ou quando $x^2 - 2 = 0$. Logo os zeros de $f(x)$ são $x = 0$, $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$.
2. Como a função $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$, não existem assíntotas verticais no gráfico de $f(x)$.
Como

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} |x|x(x^2 - 2) = \infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} |x|x(x^2 - 2) = -\infty,$$

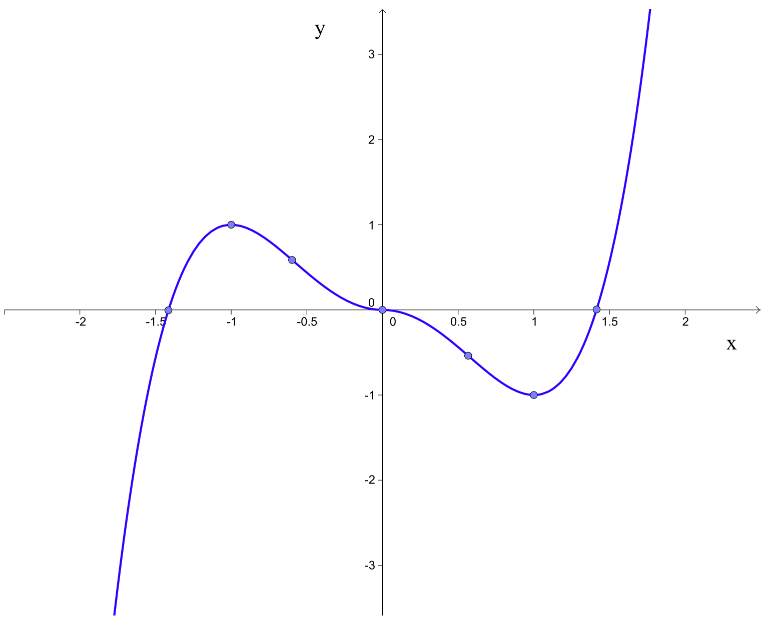
não existem assíntotas horizontais no gráfico de $f(x)$.

3. A função $f(x)$ é crescente onde $f'(x) > 0$. Como $f'(x) = |x|(4x^2 - 4) = 4|x|(x^2 - 1)$ e $|x| > 0$ para $x \neq 0$, fazendo o estudo de sinal de $x^2 - 1$, $f(x)$ é crescente em $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. A função $f(x)$ é decrescente onde $f'(x) < 0$, isto é, em $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

4. Os pontos críticos são os pontos onde não existe $f'(x)$ e onde $f'(x) = 0$. Teremos somente pontos críticos onde a derivada se anula. Como $f'(x) = 4|x|(x^2 - 1)$, os zeros de f' são quando $x = 0$, $x = 1$ e $x = -1$.
   Como $f(x)$ é crescente em $(-\infty, -1)$ e decrescente em $(-1, 0)$, o ponto $(-1, 1)$ é um ponto de máximo local. Como $f(x)$ é decrescente em $(0, 1)$ e crescente em $(1, \infty)$, o ponto $(1, -1)$ é um ponto de mínimo local. Como $f(x)$ é decrescente em $(-1, 0) \cup (0, 1)$, o ponto $(0, 0)$ não é ponto nem de máximo nem de mínimo local.
   Como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, não existem nem máximo absoluto nem mínimo absoluto.

5. Para $x > 0$, $f'(x) = 4x(x^2 - 1) = 4x^3 - 4x$ e $f''(x) = 12x^2 - 4$.
   Para $x < 0$, $f'(x) = -4x(x^2 - 1) = -4x^3 + 4x$ e $f''(x) = -12x^2 + 4$.
   Temos $f''_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{4x^3 - 4x}{x} = -4$
   e
   $f''_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-4x^3 + 4x}{x} = 4$,
   logo não existe $f''(0)$.
   A função será côncava para cima onde $f''(x) > 0$, isto é, em $\left(-\sqrt{\dfrac{1}{3}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}, \infty\right)$
   e será côncava para baixo onde $f''(x) < 0$, isto é, em $\left(-\infty, -\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)$.
   Os pontos de inflexão são pontos onde muda a concavidade, isto é, $(0, 0)$, $(1/\sqrt{3}, -5/9)$ e $(-1/\sqrt{3}, 5/9)$.

O gráfico de f será:



4^a **Questão:** (1,5 ponto) Sejam a função

$$f(x) = (x-a)(x-b)g(x),$$

I um intervalo aberto contendo $[a,b]$, onde $g(x), x \in I$, é contínua em $[a,b]$ e $g(x) > 0$, para todo $x \in [a,b]$. Suponha que $g'(x)$ é contínua em $[a,b]$ e que existe $g''(x)$ em (a,b).

1. Mostrar que $f(x)$ não se anula em (a,b) e que $f(x)$ tem um ponto crítico em (a,b);
2. Mostrar que existe $c \in (a,b)$ tal que $f''(c) = g(a) + g(b)$.

Solução.

1. $f(x) = 0$ se e somente se $x = a$, $x = b$ ou $g(x) = 0$. Logo, não existe $x \in (a,b)$ que faça $f(x) = 0$.
   Como $g(x)$ é contínua em $[a,b]$ e $g(x)$ é derivável em (a,b) também teremos $f(x)$ contínua em $[a,b]$ e $f(x)$ derivável em (a,b). Assim, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio a f no intervalo $[a,b]$ e existe $c \in (a,b)$ tal que

   $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0,$$

   o que mostra que $f(x)$ tem um ponto crítico em (a,b).
2. Como $g'(x)$ é contínua em $[a,b]$ e $g'(x)$ é derivável em (a,b), também teremos $f'(x)$ contínua em $[a,b]$ e $f'(x)$ derivável em (a,b). Assim, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio a f' no intervalo $[a,b]$ e existe $c \in (a,b)$ tal que

   $$f''(c) = \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a} = \frac{(b-a)g(b) - (a-b)g(a)}{b-a} = \frac{(b-a)[g(b) + g(a)]}{b-a} = g(b) + g(a),$$

   como queríamos mostrar.