DEPARTAMENTO de MÉTODOS MATEMÁTICOS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

GABARITO da PRIMEIRA PROVA UNIFICADA de CÁLCULO I

20 de outubro de 2010

Questão 1. (*3,0 pontos*)

(a) Calcule:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$

(b) Seja $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{\sqrt{x}-x+2} & \text{se} \quad x\neq 4\\ b & \text{se} \quad x=4\end{cases}$. Determine a e b, de modo que f seja contínua em $x=4$.

Solução.

(a) (i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=1.$

(ii) Note que

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi/2-\arctan x}{1/x}.$$

Aplicando a Regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+1/x^2}=1\,.$$

(b) Se f é contínua em $x=4$:

(1) Existe $f(4)$; (2) Existe $\displaystyle\lim_{x\to4}f(x)$; (3) $\displaystyle\lim_{x\to4}f(x)=f(4)$.

Para que exista $\displaystyle\lim_{x\to4}f(x)=\lim_{x\to4}\frac{x-a}{\sqrt{x}-x+2}$, devemos ter $\displaystyle\lim_{x\to4}x-a=0$, ou seja, $a=4$.

Isto porque, uma vez que $\displaystyle\lim_{x\to4}\sqrt{x}-x+2=0$, se o limite da expressão no numerador for diferente de zero, $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{x-a}{\sqrt{x}-x+2}$ não existirá.

Para satisfazer à condição 3 e encontrar o valor $f(4)=b$, vamos calcular $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{x-a}{\sqrt{x}-x+2}$.

Veja que a expressão do limite corresponde a uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Usando a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to4}\frac{x-a}{\sqrt{x}-x+2}=\lim_{x\to4}\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}-1}=-\frac{4}{3}\,.$$

Assim, $b=-\dfrac{4}{3}$.

Questão 2. (*2,0 pontos*)

(a) Encontre os pontos da curva $x^2 - xy + y^2 = 3$ onde a reta tangente é horizontal.

(b) Suponha que $f(2) = 7$ e $f'(x) \geqslant 2$ para $x \in [2,5]$. Qual o menor valor que $f(5)$ pode ter?

Solução.

(a) Derivando implicitamente com relação a x:

$$2x - y - x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-2x}{2y-x}.$$

A reta tangente no ponto (x,y) será horizontal se, e somente se, $\frac{dy}{dx} = 0$ ou, equivalentemente, $y = 2x$. Substituindo $y = 2x$ na equação da curva:

$$x^2 - x(2x) + 4x^2 = 3 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x \pm 1.$$

Portanto, os pontos da curva onde a reta tangente é horizontal são $(1,2)$ e $(-1,-2)$.

(b) Podemos aplicar o Teorema do Valor Médio ao intervalo $[2,5]$, pois f é diferenciável (logo, contínua) em toda parte. Então, existe um número c tal que

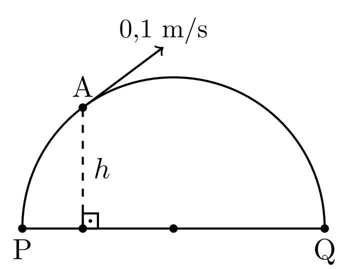
$$f'(c) = \frac{f(5)-f(2)}{5-2} \Rightarrow f(5) = f(2) + 3f'(c) \Rightarrow f(5) = 7 + 3f'(c)\,.$$

Como $f'(x) \geq 2$ em $[2,5]$, teremos $f'(c) \geq 2$ e, portanto, $f(5) \geq 13$.
Logo, o menor valor de $f(5)$ é 13.

Questão 3. (*2,0 pontos*)

No desenho, o ponto A representa um objeto que se desloca sobre uma semicircunferência de raio 5 m, com velocidade constante 0,1 m/s. Em cada instante, h é a distância de A até o diâmetro PQ.

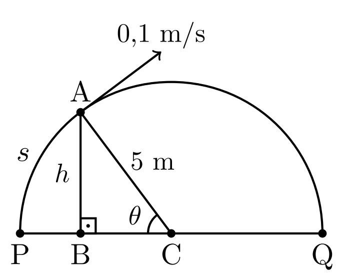
Durante o movimento de subida, qual será a taxa de variação da distância h no momento em que ela medir 4 m?



Solução.

Se raciocinarmos como nas aulas de física, encontraremos uma solução muito simples. Basta observarmos que a taxa de variação de h é dada pela componente vertical da velocidade do ponto A.

Deixamos esta solução para você completar e apresentamos abaixo uma outra (um pouco maior) que utiliza ideias normalmente desenvolvidas nas aulas de cálculo.



Do triângulo ABC:

$$h = 5\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow \frac{dh}{dt} = 5\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\,.$$

Do setor circular CAP:

$$s = 5\theta \Rightarrow \frac{ds}{dt} = 5\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow 0{,}1 = 5\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = 0{,}02\,.$$

Ou seja, $\dfrac{dh}{dt} = 5\cos\theta.0{,}02 = 0{,}1\cos\theta$. Quando $h = 4$, $\mathrm{BC} = 3$ e, portanto, $\dfrac{dh}{dt} = 0{,}1.\dfrac{3}{5} = 0{,}06$ m/s.

Questão 4. *(3,0 pontos)*

Seja $f(x) = x^2 e^{(4-x)}$. Obtenha, caso existam:

(a) As assíntotas horizontais e verticais do gráfico de f.

(b) Os intervalos onde f é crescente e onde é decrescente.

(c) Os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima, onde é côncavo para baixo e os pontos de inflexão.

Usando as informações acima, esboce o gráfico de f e determine seus valores extremos (relativos e absolutos) caso existam.

Solução.

(a) Assíntotas Horizontais:

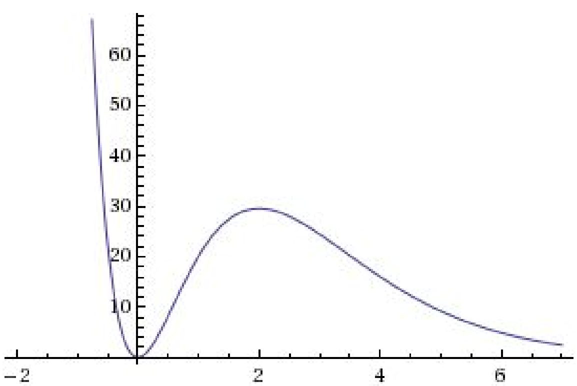
$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{4-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x-4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^{x-4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^{x-4}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{4-x} = \infty\,.$$

Logo, $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f.

Assíntotas Verticais: não possui pois f é contínua nos reais.

(b) $f'(x) = 2xe^{4-x} - x^2e^{4-x} = e^{4-x}(2x - x^2)$.
Como e^{4-x} é sempre maior que zero, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 > 0$. Então, se $x \in (0, 2)$, f é crescente.
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 < 0$. Logo, se $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, f é decrescente.

(c) $f''(x) = 2e^{4-x} - 4xe^{4-x} + x^2e^{4-x} = \left(x^2 - 4x + 2\right) e^{4-x}$.
Assim, se $x \in (-\infty, 2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2}, \infty)$, $f''(x) > 0$ e o gráfico de f é côncavo para cima. Se $x \in (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$, $f''(x) < 0$ e o gráfico de f é côncavo para baixo.
Em vista disso, $\left(2-\sqrt{2}, f(2-\sqrt{2})\right)$ e $\left(2+\sqrt{2}, f(2+\sqrt{2})\right)$ são os pontos de inflexão.



Valores extremos.

De acordo com o item (b) e da observação do gráfico ao lado temos:

máximo relativo, $4e^2$ em $x = 2$;

mínimo absoluto, 0 em $x = 0$.