UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PRIMEIRA PROVA UNIFICADA – CÁLCULO I. 2010-I.

GABARITO

Questão 1.*(2,0 pontos)*

(a) Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \cos\left[(x-1)^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^3-1}\right)\right], & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 0\,, & \text{se} \quad x = 1. \end{cases}$$

Determine o valor de $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

(b) Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por :

$$f(x) = x^3 - x + 1 \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^3(1+\sin x).$$

Mostre que os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ se interceptam pelo menos em um ponto.

Solução.

(a) Primeiro temos que

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2 \sin\left(\frac{1}{x^3-1}\right) = 0. \tag{1}$$

De fato,

$$-(x-1)^2 \leq (x-1)^2 \sin\left(\frac{1}{x^3-1}\right) \leq (x-1)^2.$$

Logo, como $\lim\limits_{x\to 1} -(x-1)^2 = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$, podemos usar o teorema do confronto para mostrar (1).
Além disso, sendo a função $\cos(x)$ contínua em $\mathbb{R}$, temos : $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 1$.

(b) Seja $h(x) = f(x) - g(x)$. Sendo $h(x)$ a diferença de duas funções contínuas, $h(x)$ é contínua. Além disso temos que

$$h(0) = 1 > 0 \qquad \text{e} \qquad h(1) = 1 - (1+\sin 1) < 0.$$

Logo, usando o Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in (0,1)$ onde $h(c) = 0$, isto é $f(c) = g(c)$.

Questão 2.*(2,0 pontos)*

(a) Determine $f'(x)$; onde $f(x) = \ln(\sin^2(x))$.

(b) Determine as equações das retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^2 - 3x$ que passam pelo ponto $(3, -4)$.

(c) Ache a equação da reta tangente ao gráfico da função implícita definida por $x^3 + y^3 = 6xy$, no ponto $(3, 3)$.

Solução.

(a) Sendo $g(x) = \ln(x)$, $h(x) = x^2$ e $u(x) = \sin(x)$, temos que $f(x) = g \circ h \circ u(x)$. Pela Regra da Cadeia, $f'(x) = g'((h \circ u)(x)).h'(u(x)).u'(x)$. Logo

$$f'(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}.2\sin(x).\cos(x) = 2\cot(x).$$

(b) O ponto dado não pertence ao gráfico de f. Por outro lado a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

onde $f'(x_0) = 2x_0 - 3$ e $f(x_0) = x_0^2 - 3x_0$. O ponto $(3, -4)$ pertence à reta tangente, logo, obtemos:

$$-4 = y(3) = x_0^2 - 3x_0 + (2x_0 - 3)(3 - x_0) = -x_0^2 + 6x_0 - 9.$$

Resolvendo a equação, obtemos: $x_0 = 1$ ou $x_0 = 5$. Então, as equações obtidas são

$$y + x + 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad y - 7x + 25 = 0.$$

(c) Derivando a equação implicitamente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}.$$

No ponto $(3, 3)$ temos que $\dfrac{dy}{dx} = -1$, e a equação da reta tangente é $x + y = 6$.

Questão 3.*(3,0 pontos)*

Considere a função definida por $f(x) = x^{1/3} + 2x^{4/3}$. Determine, caso existam:

(a) O domínio e a imagem de $f(x)$.

(b) As assíntotas verticais e horizontais.

(c) Os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente.

(d) Os valores de máximo e mínimo locais e/ou absolutos.

(e) Os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.

(f) Use as informações anteriores para fazer um esboço do gráfico de f.

Solução.

(a) A função está definida para $x \in \mathbb{R}$. Logo veremos que a imagem de $f(x)$ é $[-3/8, \infty)$ (ver ítem (d)).

(b) Como o domínio de $f(x)$ é $\mathbb{R}$, não existem assíntotas verticais. Além disso, como

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x^{4/3} \left(\frac{1}{x} + 2 \right) = \infty$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^{4/3} \left(\frac{1}{x} + 2 \right) = \infty,$$

não existem assíntotas horizontais.

(c) Como $f'(x) = \dfrac{1 + 8x}{3x^{2/3}}$, Os pontos críticos correspondem aos valores $x = -1/8$ (pois $f'(-1/8) = 0$) e $x = 0$ (pois $f'(0)$ não existe).

Estudando o sinal da derivada, note que $x^{2/3} > 0$ para qualquer $x \neq 0$. Logo

- $f'(x) > 0$ quando $x > -1/8$ e
- $f'(x) < 0$ quando $x < -1/8$.

Assim, a função $f(x)$ é crescente quando em $(-\infty, -\frac{1}{8})$ e é decrescente em $(-\frac{1}{8}, \infty)$.

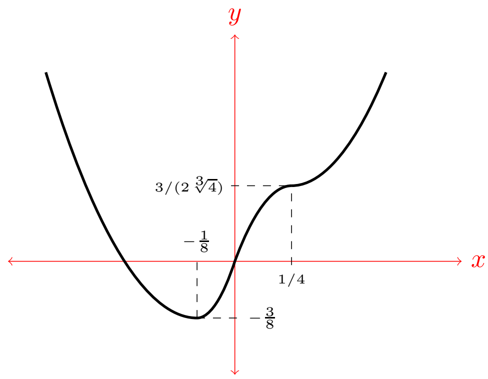
(d) Pelo estudo de sinal da derivada primeira, o ponto $\left(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{8} \right)$ é um ponto de mínimo local e o ponto $(0, 0)$ não é ponto nem de máximo nem de mínimo local. Logo o ponto $\left(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{8} \right)$ é um ponto de mínimo absoluto. Podemos concluir também que a imagem de f é o intervalo $[-3/8, \infty)$.

(e) Como $f''(x) = \frac{2}{9}\left(\frac{4x-1}{x^{5/3}}\right)$, então $f''(x) = 0$ quando $x = 1/4$ e não existe $f''(0)$. Logo, os candidatos a pontos de inflexão são: $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2\sqrt[3]{4}}\right)$ e $(0, 0)$. Pelo estudo de sinal da derivada segunda:

- $f''(x) > 0$ quando $x < 0$ ou $x > 1/4$
- $f''(x) < 0$ quando $0 < x < 1/4$.

Portanto, a concavidade está voltada para cima em $(-\infty, 0)$ e $(\frac{1}{4}, \infty)$ e a concavidade está voltada para baixo em $(0, \frac{1}{4})$. Assim, os pontos $(0, 0)$ e $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2\sqrt[3]{4}}\right)$ são pontos de inflexão.

(f) Um esboço do gráfico:



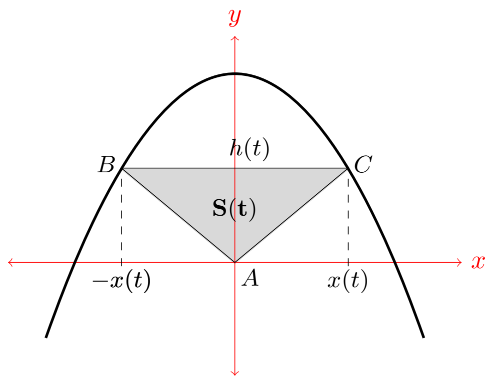
Questão 4.*(1,0 pontos)*

Um triângulo isósceles ABC tem o vértice A em (0,0). A base deste triângulo que está situada acima deste vértice é paralela ao eixo x, e tem os vértices B e C localizados sobre a parábola $y = 9 - x^2$. Sabendo que o lado BC aumenta à razão de 2cm/s, determine a taxa de variação da área do triângulo, no instante em que o lado BC mede 4 cm.

Solução.

Denotando-se $\overline{AD} = h(t)$ e $\overline{BC} = 2x(t)$, a área do triângulo ABC é escrita como :

$$S(t) = \frac{2h(t)x(t)}{2} = h(t)x(t).$$



Assim,

$$S(t) = h(t)x(t) = (9 - x^2)x(t) \quad \Rightarrow \quad S(t) = 9x - x^3.$$

Logo

$$\frac{dS}{dt} = 9x' - 3x^2x'.$$

Como $(2x(t))' = 2x' = 2cm/s$, então $x'(t) = 1cm/s$. Sendo $\overline{BC} = 4 = 2x(t) \Rightarrow x(t) = 2cm$. Logo,

$$\frac{dS}{dt} = 9 - 12 = -3\ cm^2/s.$$

Assim, como $\dfrac{dS}{dt} < 0$, a área decresce.

Questão 5.*(2,0 pontos)*
Calcule os seguintes limites.

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin(x)) - \cos(x)}{x^2} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{(x-1)^2} \right).$$

Solução.

(a) Temos a indeterminação 0/0. Aplicando a regra de L'Hôspital temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin(x)) - \cos(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \left[\frac{-\sin(\sin(x))\cos(x) + \sin(x)}{2x} \right] \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(\sin(x))\cos(x)}{2x} + \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x}. \end{aligned}$$

Usando o fato que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, teremos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin(\sin(x))\cos(x)}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)} . \frac{\sin(x)}{x} . \cos(x) \right] = -\frac{1}{2}.$$

Logo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin(x)) - \cos(x)}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

(b) Este limite é da forma $\infty - \infty$. Escrevendo

$$\left[\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{(x-1)^2} \right] = \frac{(x-1)^2 - x\ln x}{(x-1)^2 \ln x} = \frac{0}{0},$$

podemos usar L´Hospital. Assim

$$\lim_{x\to 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{(x-1)^2} \right] = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1) - 1 - \ln x}{(x-1)^2 + 2(x-1)\ln x} = -\infty.$$