INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Solução da 1ª Prova Unificada de Cálculo I
Engenharia e Engenharia Química
28/10/2009

1ª Questão: (2.5 pontos)
a)Determine, caso existam, os limites :
i) $\lim_{x\to+\infty}(e^x - x^2)$.
ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+|x|(1+x)}{x} f(x)$, sendo f(x) uma função contínua em x=0 tal que f(0)=3.
b)Seja uma função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, derivável para todo $x \in \mathbf{R}$. Determine os valores de **a** e **b** para que $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{f(x) - \mathbf{a} - \mathbf{b}(x-10)}{x-10} = 0$.

Solução:

a)Considere $f(x) = (e^x - x^2) = x^2(\dfrac{e^x}{x^2} - 1)$. Vamos analisar o $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{e^x}{x^2})$.
Como este limite é da forma $\frac{\infty}{\infty}$, podemos usar L´Hospital e temos:

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{e^x}{x^2}) = \lim_{x\to+\infty}(\frac{e^x}{2x}).$$

Usando L'Hospital uma vez mais,

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{e^x}{x^2}) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{e^x}{2}) = \infty$.

Assim, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

ii)Considere $g(x) = \dfrac{x+|x|(1+x)}{x} f(x)$. Devemos considerar dois casos:
•Para $x \geq 0, |x| = x$ e temos $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+|x|(1+x)}{x} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+x(1+x)}{x} f(x)$.
Como f(x) é uma função contínua em 0,
$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}(2+x)f(x) = 6$
•Para $x \leq 0, |x| = -x$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+|x|(1+x)}{x} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-x(1+x)}{x} f(x)$
$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}(-x)f(x) = 0$

Portanto $\lim_{x\to 0^+} g(x) \neq \lim_{x\to 0^-} g(x)$. Assim, não existe o $\lim_{x\to 0} g(x)$ não existe.

b)Se $\lim\limits_{x\to 10} f(x) - \mathbf{a} - \mathbf{b}(x-10) \neq 0$ o limite $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{f(x) - \mathbf{a} - \mathbf{b}(x-10)}{x-10}$ não existira.
Portanto, devemos ter $\lim\limits_{x\to 10} f(x) - \mathbf{a} - \mathbf{b}(x-10) = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = f(10)$ pois f(x) é contínua.
Como f é uma função diferenciável em x=10, $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{f(x) - f(10)}{x-10} - f'(10) = 0 \Rightarrow \mathbf{b} = f'(10)$.

2ª Questão: (2.5 pontos)

a)Considere a função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \arctan\sqrt{5+x^4}$. Calcule $f'(x)$.

b)Determine o valor de $y'(x)$ no ponto P=(1,1), sabendo que $3\ln\dfrac{x}{y} + 5\dfrac{y}{x} = 5$.

c)Sejam **A** e **B** os pontos em que o gráfico de $f(x) = x^2 - \alpha x$ com $\alpha \in \mathbf{R}$ intercepta o eixo x. Determine α para que as retas tangentes ao gráfico de f, em **A** e em **B**, sejam perpendiculares.

Solução:

a)$f((g(x)) = \arctan\sqrt{5+x^4}$ onde $f(z) = \arctan z$ e $g(x) = \sqrt{5+x^4}$. Assim,

$f'(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ e $g'(x) = \dfrac{2x^3}{\sqrt{5+x^4}}$.

Portanto, $f'(x) = \dfrac{2x^3}{(6+x^4)\sqrt{5+x^4}}$.

b)$\left(3\ln\dfrac{x}{y} + 5\dfrac{y}{x}\right)' = 0$.

$3\dfrac{y}{x}\left(\dfrac{y-xy'}{y^2}\right) + 5\left(\dfrac{y'x-y}{x^2}\right) = 0$. Como y(1)=1 temos :

3(1-y')+5(y'-1)=0 $\Rrightarrow 2y' = 2 \Rrightarrow y'(1) = 1$.

c)$f(x) = x^2 - \alpha x \quad \Leftrightarrow \quad x(x-\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $x = \alpha$.

Assim, o gráfico de f intercepta o eixo x nos pontos A=(0,0) e B=$(\alpha, 0)$. Como f'(x) = $2x - \alpha$, temos que f'(0)=$-\alpha$ e $f'(\alpha) = \alpha$.

Para que as retas tangentes ao gráfico de f, em A e em B, sejam perpendiculares, devemos ter f'(0)$f'(\alpha)$= -1 , ou seja, $(-\alpha)\alpha = -1$

Portanto, $(\alpha)^2 = 1$ e $\alpha = \pm 1$.

3ª Questão: (2.0 pontos)

Considere um triângulo retângulo ABC no plano xy de forma que seu ângulo reto esteja no vértice B, tenha um vértice fixo A no ponto (0,0), e o terceiro vértice C sobre o arco de parábola $y = 1 + \dfrac{7}{36}x^2$, com $x \geq 0$. O ponto B parte de (0,1) no instante t=0, movendo-se com velocidade constante e igual a 2cm/s ao longo do eixo y em seu sentido positivo. **Determine com que rapidez a área do triângulo ABC aumenta quando $t = \dfrac{7}{2}$ s.**

Solução:

A área do triângulo ABC é dada por S=$\frac{1}{2}$xy , onde $y = 1 + \frac{7}{36}x^2$. Derivando a área S em relação a t (tempo), segue $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dx}{dt}y + x\dfrac{dy}{dt}\right)$.

Como $\dfrac{dy}{dt} = 2$ temos $2 = \dfrac{7}{36}\left(2x\dfrac{dx}{dt}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{36}{7x}}$.

Como y=1+2t, para t=$\dfrac{7}{2}$ temos y=8. De 8=1+$\dfrac{7}{36}x^2$, segue que x=6, pois $x \geq 0$.

Substituindo os valores de x e y na expressão de $\dfrac{dS}{dt}$ obtemos;

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\Big(\frac{dx}{dt}y + 2x\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{6}{7}8 + 12\Big) = \frac{66}{7}cm^2/s.$$

4ª Questão: (3.0 pontos)
Considere a função $f(x) = x^2 e^{(\frac{2}{x})}$. Determine
a)O domínio e a imagem da função f(x).
b)As assíntotas horizontais e verticais, caso existam.
c)Os intervalos onde a função f(x) cresce e onde decresce, e os pontos de máximo e de mínimo relativos, caso existam.
d)Os intervalos onde o gráfico da função f(x) é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo, e os pontos de inflexão caso existam.
e)Faça um esboço do gráfico da função f(x).
f) Determine o máximo e mínimo absoluto, caso existam.

Solução:

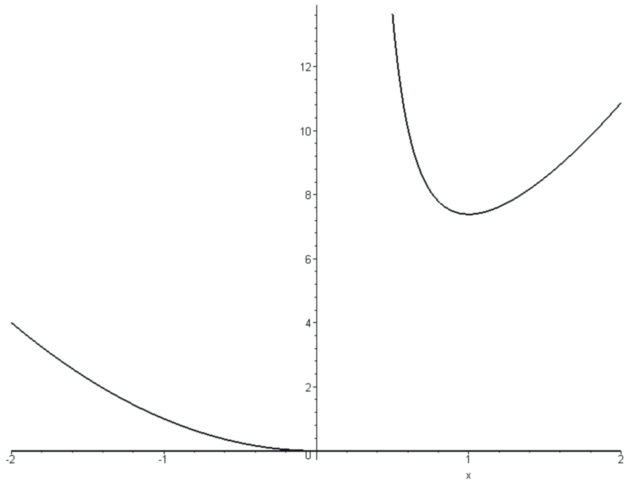
a)Domínio de f : $\mathbb{R} - \{0\}$. Imagem de f : $(0, +\infty)$.

b)$\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{(\frac{2}{x})}$ é da forma $0.\infty$. Fazendo f(x)=$\dfrac{g(x)}{h(x)}$ onde g(x)=$e^{(\frac{2}{x})}$ e h(x)=$\dfrac{1}{x^2}$ o $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)}{h(x)}$ é agora da forma $\frac{\infty}{\infty}$, e podemos aplicar L´Hospital tantas vezes quanto for necessário.
Assim, $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{g"(x)}{h"(x)}$, isto é:
$\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{(\frac{2}{x})} = \lim_{x\to 0^+} 2e^{(\frac{2}{x})} = +\infty$.
A reta x=0 é uma assíntota horizontal e $\lim_{x\to 0^-} x^2 e^{(\frac{2}{x})} = 0$.

c)$f'(x) = 2e^{(\frac{2}{x})}(x-1)$, e $f'(x) = 0 \iff x = 0$.
Para $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ temos que f'(x)= 0 , logo f é decrescente.
Para $x > 1$ temos que $f'(x) > 0$, logo f é crescente. Como f'(1)= 0 temos que x=1 é ponto de mínimo relativo para f(x) e f(1)=e^2.

d)Sendo $f'(x) = 2e^{(\frac{2}{x})}(x-1)$, temos que $f"(x) = e^{(\frac{2}{x})}\Big(2 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\Big)$.
Como $\Big(2 + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{4}{x}\Big) = \dfrac{2x^2 - 4x + 4}{x^2} > 0$ vemos que $f"(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$.
Portanto, como não existem pontos de inflexão, o gráfico de f(x) é côncavo para cima.

e) Gráfico de f(x).



f)A função f(x) não possui extremos absolutos.