INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Resolução da 1ª Prova Unificada de Cálculo I
Engenharia e Engenharia Química

1ª Questão: (2,0 pontos)

a) $f'(x) = \dfrac{[tan(x)sec(x)](5+cos(x)) - [sec(x)(-sin(x))]}{(5+cos(x))^2}$

$f'(x) = \dfrac{5sin(x)}{(cos(x))^2(5+cos(x))^2} + \dfrac{2sin(x)}{cos(x)(5+cos(x))^2} = 5\dfrac{sec(x)tan(x)}{(5+cos(x))^2} + 2\dfrac{tan(x)}{(5+cos(x))^2}$.

b) A função composta h(x) é escrita como $h(x) = ln(2x)^{(2x)} = 2x\,ln(2x)$.
Assim,
$h'(x) = 2\,(1+ln(2x))$.
O coeficiente angular da reta $y = 4\,x$ é 4. Logo, $h'(x) = 2\,(1+ln(2x)) = 4$ e temos :
$ln(2x) = 1$.
Portanto, $x = \dfrac{e}{2}$ e $h(\dfrac{e}{2}) = 2\,\dfrac{e}{2}\,ln(e) = e$.
Desta forma, a reta que passa pelo ponto $(\dfrac{e}{2}, e)$ e tem coeficente angular 4 é dada por :
$y - e = 4(x - \dfrac{e}{2})$.

2ª Questão: (2,0 pontos)

a) Este limite é da forma ∞^0. Como $e^{\ln(e^{3x}+x^2)^{(\frac{1}{x})}} = (e^{3x}+x^2)^{(\frac{1}{x})}$, devemos calcular $e^{\lim\limits_{x\to\infty} \ln(e^{3x}+x^2)^{(\frac{1}{x})}}$.

O limite $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(e^{3x}+x^2)^{(\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(e^{3x}+x^2)}{x}$ é da forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ e podenos usar L´Hospital.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(e^{3x}+x^2)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3e^{3x}+2x}{e^{3x}+x^2} = 3$

Assim, $\lim\limits_{x\to\infty} (e^{3x}+x^2)^{(\frac{1}{x})} = e^3$

2ª Questão:

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x+1}-Ax) = \lim\limits_{x\to\infty}\left\{(\sqrt{4x^2+x+1}-Ax)\left(\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+Ax}{\sqrt{4x^2+x+1}+Ax}\right)\right\}$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x+1}-Ax) = \lim_{x\to\infty}\frac{(4-A^2)x+1+(1/x)}{A+\sqrt{4+(1/x)+(1/x)^2}}$$

Para que o limite acima seja finito, devemos ter $A^2 = 4$; caso contrário este limite não existiria.
Assim $A = \pm 2$. Porém se A= - 2, claramente o limite $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x+1}-Ax)$ não existe. Portanto, A = 2.

Para este valor de A temos $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x+1}-4x) = \dfrac{1}{4}$

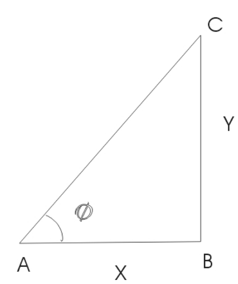
3ª Questão: (1,5 pontos)

a)Derivando implicitamente a equação $y^3+y=x$ temos : $3y^2y'+y'=1$.
Portanto, $y' = \dfrac{1}{3y^2+1}$.

Assim, $y' = g'(x) > 0$, o que nos diz ser g(x) uma função estritamente crescente e portanto um a um.
b)Pelo item **a)**, a inclinação da reta normal ao gráfico de g no ponto (10,2) é : $-\dfrac{1}{g'(10)} = -13$.
Uma equação dessa reta é dada por $y = 2-13(x-10)$.

4ª Questão: (1,5 pontos)

Da figura ao lado temos que $\tan(\phi) = \dfrac{y}{x}$. Como todas as variáveis que aparecem nesta relação dependem do tempo t, derivando implicitamente em relação a t temos:



$\sec^2(\phi)\dfrac{d(\phi)}{dt} = \dfrac{xdy/dt - ydx/dt}{x^2}$. Assim,

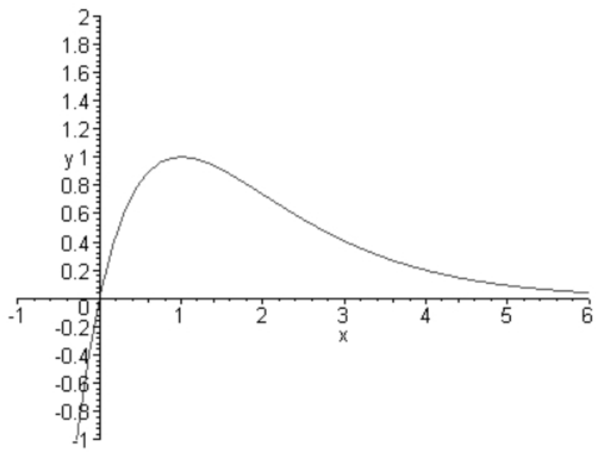
$$\frac{d(\phi)}{dt} = \frac{xdy/dt - ydx/dt}{x^2\sec^2(\phi)}.$$

Como, $\sec^2(\phi) = 1+\tan^2(\phi)$ temos que $\sec^2(\phi) = \dfrac{244}{100}$.

Usando os dados do problema obtemos :

$$\frac{d(\phi)}{dt} = \frac{10(-2)-12(1)}{244} = -\frac{8}{61} \text{ cm/min.}$$

5ª Questão: (3 pontos)



1. $\mathbf{D}_f = \mathbb{R}$. A Imagem de f é $(-\infty, 1]$.
Não esite assíntota vertical.
Assíntota horizontal :
O $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x-1}}$ é da forma $\frac{\infty}{\infty}$ de maneira que podemos usar L´Hospital, obtendo $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$

O $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{x-1}}$ é da forma $(-\infty)\infty$. Portanto, não existe limite quando x tende a $-\infty$.

2.De $f'(x) = \frac{1-x}{e^{(x-1)}}$ temos:
$f'(1) = 0$.
$f'(x > 0$ quando $x < 1$. Função crescente.
$f'(x < 0$ quando $x > 1$. Função decrescente.
3.Derivando $f'(x)$ obtemos : $f''(x) = \frac{x-2}{e^{(x-1)}}$. Portanto, como $f''(1) = -1 < 0$ temos que x=1 é ponto de máximo local.
4.Do item anterior, temos que :
$f''(2) = 0$
$f''(x) > 0$ se $x > 2$. Função côncava para cima.
$f''(x) < 0$ se $x < 2$. Função côncava para baixo.
Assim, o ponto $\left((2, \frac{2}{e})\right)$ é ponto de inflexão da função.