Universidade Federal do Rio de Janeiro
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Métodos Matemáticos

Gabarito da 1^a Prova Unificada de Cálculo I

Engenharia e Matemática

03/10/2008

1^a **Questão:** (2 pontos)

Seja $y = f(x)$ uma função derivável definida implicitamente pela equação

$$x^2y + 16y^4 - 2x + \frac{59}{16} = \sqrt{x^2+3}\,,$$

próximo do ponto $\left(1, \frac{1}{4}\right)$. Determine o **ângulo** que a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $\left(1, \frac{1}{4}\right)$, faz com o eixo x.

Solução

Derivando em relação a x, temos:

$2xy + x^2\,\dfrac{dy}{dx} + 64\,y^3\,\dfrac{dy}{dx} - 2 = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}$.

Substituindo $(x, y) = (1, \frac{1}{4})$, temos: $\dfrac{dy}{dx} = 1$.

Portanto, o ângulo que a reta tangente faz com o eixo x é $\pi/4$.

2^a **Questão:** (2 pontos)

Determine os valores de a e de b para que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida abaixo seja **contínua** em $\mathbb{R}$. Justifique sua resposta.

$$f(x) = \begin{cases} (\cosh x + ax)^{(b/x)} & \text{se } x > 0\,; \\ e & \text{se } x = 0\,; \\ ax + b & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

$\left(\text{lembramos que } \cosh x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)$

Solução

Para $f(x)$ ser contínua em $x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$.

Como $\mathrm{e} = f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (ax + b) = b$, temos $b = \mathrm{e}$.

Quando vamos calcular o limite lateral $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, encontramos uma indeterminação do tipo 1^∞. Mas:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0^+} g(x)}$, onde $g(x) = \dfrac{b\ln(\cosh x + ax)}{x}$.

Quando vamos calcular o limite lateral $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$, encontramos uma indeterminação do tipo $0/0$ e podemos aplicar L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{b\ \ln(\cosh x + ax)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{b\ (\operatorname{senh} x + a)}{\cosh x + ax} = ba.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \mathrm{e}^{ba} = f(0) = \mathrm{e}$, o que implica $ba = 1$. Temos assim, $a = \frac{1}{e}$.

3^a **Questão:** (3 pontos)

Considere a função definida por $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Determine, caso existam:

1. O domínio e a imagem de $f(x)$;
2. As assíntotas verticais e horizontais;
3. Os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente;
4. Os valores de máximo e mínimo locais e/ou absolutos;
5. Os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão;

Use as informações anteriores para fazer um esboço do gráfico de f.

Solução
1. A função está definida para $x > 0$.

2. Como $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ e $y = 0$ é uma assíntota vertical.

Como $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \infty$, por L'hospital, $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ e $x = 0$ é uma assíntota horizontal.

3. Como $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, $f'(x) = 0$ quando $x = \mathrm{e}$, $f'(x) > 0$ quando $0 < x < \mathrm{e}$ e $f'(x) < 0$ quando $x > \mathrm{e}$.
A função $f(x)$ é crescente quando $0 < x < \mathrm{e}$ e é decrescente quando $x > \mathrm{e}$.

4. Portanto, o ponto $(\mathrm{e}, f(\mathrm{e})) = (\mathrm{e}, \frac{1}{\mathrm{e}})$ é um ponto de máximo local.
A função não possui mínimo local nem mínimo absoluto. O ponto $(\mathrm{e}, f(\mathrm{e})) = (\mathrm{e}, \frac{1}{\mathrm{e}})$ é um ponto de máximo absoluto.

1. A imagem de $f(x)$ é $(-\infty, \frac{1}{e})$.

5. Como $f''(x) = \dfrac{x[-3 + 2\ln x]}{x^4}$, $f''(x) = 0$ quando $x = \mathrm{e}^{3/2}$, $f''(x) > 0$ quando $x > \mathrm{e}^{3/2}$ e $f''(x) < 0$ quando $0 < x < \mathrm{e}^{3/2}$.
A concavidade está voltada para cima quando $x > \mathrm{e}^{3/2}$ e a concavidade está voltada para baixo quando $0 < x < \mathrm{e}^{3/2}$.
Portanto o ponto $(\mathrm{e}^{3/2}, \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3/2})$ é um ponto de inflexão.

Um esboço do gráfico pode ser visto com seu professor.

4^a **Questão:** (2 pontos)
Um cilindro circular reto está inscrito em uma esfera. Se o raio da esfera **cresce** a uma taxa de 2 cm/s e a altura do cilindro **decresce** a uma taxa de 1 cm/s, com que razão está variando a **área lateral do cilindro** no momento em que o raio da esfera é 10 cm e a altura do cilindro 16 cm? A área lateral do cilindro está aumentando ou diminuindo?

Solução
Sejam r e h o raio e a altura do cilindro circular reto. Seja R o raio da esfera. Sabemos que: $\dfrac{dR}{dt} = 2$ e $\dfrac{dh}{dt} = -1$.

A área lateral do cilindro é dada pela fórmula $A = 2\pi rh$. Logo:

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi\frac{dr}{dt}h + 2\pi r\frac{dh}{dt} = 32\pi\frac{dr}{dt} - 2\pi r.$$

Basta calcularmos r e $\dfrac{dr}{dt}$ no instante do problema.

Por Pitágoras, $r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2$. Logo, $r = 6$.

Derivando com relação a t: $2R\frac{dR}{dt} = 2r\frac{dr}{dt} + \frac{2h}{4}\frac{dh}{dt}$, o que nos dá que $\frac{dr}{dt} = 4$.

Logo $\frac{dA}{dt} = 116\pi$.

A área do cilindro está aumentando à razão de $116\pi\ cm^2/s$.

5^a **Questão:** (1 ponto)

Seja $f(x) = 2x + \operatorname{arcsen} x - \frac{\pi}{2}$.

1. Mostre, usando o **Teorema do Valor Intermediário**, que existe um número c tal que $f(c) = 0$.
2. Mostre que existe no máximo um número c tal que $f(c) = 0$.

Solução

1. Como $f(0) = -\frac{\pi}{2} < 0$, $f(1) = 2 > 0$ e a função $f(x)$ é contínua em seu domínio $[-1, 1]$, segue pelo teorema do valor intermediário que existe $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

2. Como $f'(x) = 2 + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} > 0$, a função é estritamente crescente em $(-1, 1)$ e só pode ter um zero.