INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Gabarito da 1ª Prova Unificada de Cálculo I
Engenharia, Matemática Aplicada e Ciência da Computação
10/05/2008

1ª Questão: (2.0 pts)

(a) Calcule o seguinte limite. Justifique sua resposta.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}+5}$$

(b) Determine o valor de b para que a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida abaixo seja contínua. Justifique sua resposta.

$$f(x) = \begin{cases} (1+\operatorname{sen} 2x)^{3/x} & \text{se } x > 0; \\ b & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

Solução: Primeiramente, resolvendo a parte (a):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt{1+5/x}}{\sqrt{x}(1+5/\sqrt{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+5/x}}{1+5/\sqrt{x}} = 1.$$

(b) f é contínua se, e somente se,

$$b = \lim_{x\to o^+} (1+\operatorname{sen} 2x)^{3/x}.$$

Para $x > 0$,

$$\ln f(x) = \ln(1+\operatorname{sen} 2x)^{3/x} = \frac{3\ln(1+\operatorname{sen} 2x)}{x}.$$

Aplicando L'Hospital, obtemos

$$\lim_{x\to0^+} \ln f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{6\cos 2x}{1+\operatorname{sen} 2x} = 6.$$

Como a função logaritmo é contínua em $(0,+\infty)$, temos

$$6 = \lim_{x\to0^+} \ln f(x) = \ln(\lim_{x\to0^+} f(x)) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to0^+} f(x) = \mathrm{e}^6$$

Portanto, f é contínua se, e somente se, $b = \mathrm{e}^6$.

2ª Questão: (1.5 pts)

Determine a equação de uma reta paralela a $x+y=1$ e tangente à curva $y^3+xy+x^3=0$ em um ponto (x_0,y_0), com $x_0<0$ e $y_0<0$.

Solução: A reta $x+y=1$ possui inclinação igual a -1. Se a função $y=f(x)$ está implícita na equação

$$y^3+xy+x^3=0,$$

tem-se, derivando implicitamente em relação a x,

$$3y^2y'+y+xy'+3x^2=0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{y+3x^2}{x+3y^2}.$$

Portanto,

$$y' = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x + 3y^2 = 3x^2 + y \quad \Leftrightarrow \quad x - y = 3(x-y)(x+y).$$

Temos duas possibilidades: ou $x = y$ ou $x + y = 1/3$. No primeiro caso, substituindo na equação, obtemos

$$2x^3 + x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -1/2.$$

No segundo caso, substituindo na equação, temos

$$x^3 + x\left(\frac{1}{3} - x\right) + \left(\frac{1}{3} - x\right)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{impossível}$$

Portanto, a reta paralela é obtida para os pontos $x_0 = -1/2$ e $y_0 = -1/2$, isto é,

$$y + \frac{1}{2} = -\left(x + \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad x + y + 1 = 0.$$

$3^{\underline{a}}$ Questão: (3.0 pts)

Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \mathrm{e}^{(x-1)/(x+1)}$.

(a) Encontre as assíntotas verticais e horizontais;
(b) Encontre os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente;
(c) Encontre os valores de máximo e mínimo locais;
(d) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão;
(e) Use as informações acima para fazer um esboço do gráfico de f.

Solução: Observe que o domínio de f é o conjunto $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Vamos escrever $f(x) = \mathrm{e}^{g(x)}$, onde $g(x) = (x-1)/(x+1)$.

(a) Primeiramente observamos que

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \mathrm{e}.$$

Logo, a reta $y = \mathrm{e}$ é assíntota horizontal. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1^+} g(x) = -\infty \Rightarrow &\quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = 0 \\ \lim_{x \to -1^-} g(x) = +\infty \Rightarrow &\quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty \end{aligned}$$

Portanto, a reta $x + 1 = 0$ é uma assíntota vertical.

(b) Analisando o crescimento de f. Temos

$$g(x) = \frac{x-1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \quad \forall x \neq -1.$$

Logo,

$$f(x) = \mathrm{e}^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \mathrm{e}^{g(x)} g'(x) = f(x)\frac{2}{(x+1)^2} > 0, \quad \forall x \neq 1.$$

e $f(x)$ é crescente nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(-1, \infty)$, já que $f(x) > 0$ para todo $x \neq -1$.

(c) Como f é crescente em cada componente de seu domínio, f não possui mínimos nem máximos locais.

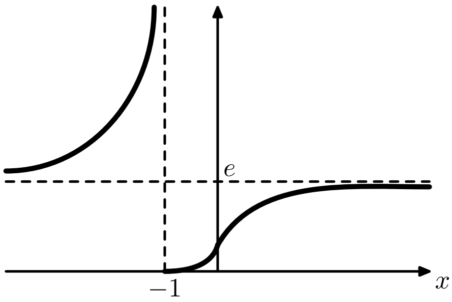
(d) Analisando a concavidade de f. Temos

$$f''(x) = \mathrm{e}^{g(x)}(g'(x))^2 + \mathrm{e}^{g(x)} g''(x) = f(x)\left(\frac{4}{(x+1)^4} - \frac{4}{(x+1)^3}\right) = -f(x)\frac{4x}{(x+1)^4}.$$

Logo,

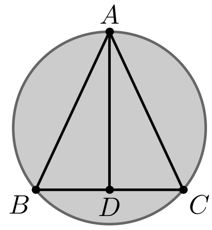
$$\begin{aligned} x < 0 \quad &\Rightarrow \quad f''(x) > 0 \quad \Rightarrow f \text{ é convexa;} \\ x > 0 \quad &\Rightarrow \quad f''(x) < 0 \quad \Rightarrow f \text{ é côncava.} \end{aligned}$$

Portanto, f é convexa (concavidade para cima) nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(-1, 0)$ e côncava (concavidade para baixo) no intervalo $(0, +\infty)$ e o único ponto de inflexão é $P = (0, 1/e)$.
(e) O gráfico de f é:



4ª Questão: (2.0 pts)

Considere o triângulo isósceles ABC inscrito em uma circunferência (veja figura ao lado). Suponha que o raio da circunferência cresce a uma taxa de 3 cm/s e a altura AD do triângulo cresce a uma taxa de 5 cm/s. Determine a taxa de crescimento da área do triângulo no instante em que o raio mede 10cm e a altura AD mede 16cm.



Solução: Sejam $r(t)$ e $h(t)$, respectivamente, o raio da circunferência e a altura do triângulo. Então, temos

$$\frac{dr}{dt} = 3 \text{ cm/s}, \quad \frac{dh}{dt} = 5 \text{ cm/s}.$$

Se denotarmos por $b(t)$ e $x(t)$, respectivamente, o comprimento dos segmentos BD e OD, sendo O o centro da circunferência, então $x^2 + b^2 = r^2$ e $h = r + x$. Assim, $x = h - r$ e, substituindo na equação anterior, temos

$$r^2 = (h-r)^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{2hr - h^2}.$$

Portanto, a área $A(t)$ do triângulo é dada por $A(t) = h\sqrt{2hr - h^2}$ e, consequentemente,

$$\frac{dA}{dt} = h'\sqrt{2hr - h^2} + h\left(\frac{hr' + h'r - hh'}{\sqrt{2hr - h^2}}\right). \qquad (*)$$

No dado instante t_0, temos

$$r(t_0) = 10, \quad h(t_0) = 16, \quad r'(t_0) = 3, \quad h'(t_0) = 5.$$

Portanto, substituindo em $(*)$, obtemos:

$$A'(t_0) = 76 \text{ cm}^2/\text{s}.$$

5ª Questão: (1.5 pts)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo $|f(x) - 3| \leq 2|x - x_0|^2$, para todo x.

(a) Calcule $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

(b) Suponha f contínua no ponto x_0. Mostre que, então, f é derivável no ponto x_0 e calcule $f'(x_0)$. Justifique suas respostas.

Solução: (a) Primeiramente observe que

$$|f(x) - 3| \leq 2|x - x_0|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 3 - 2|x - x_0|^2 \leq f(x) \leq 3 + 2|x - x_0|^2. \qquad (*)$$

Como $\lim_{x\to x_0} |x - x_0|^2 = 0$, segue do Teorema do Confronto (sanduiche),

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 3.$$

(b) Como estamos supondo f contínua, tem-se necessariamente $f(x_0) = 3$, ou $f(x) - 3 = f(x) - f(x_0)$. Logo, dividindo ambos os membros da desigualdade $(*)$ por $x - x_0$, obtemos

$$-2|x - x_0\,| \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 2|x - x_0\,|$$

e, novamente pelo Teorema do Confronto, segue que

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.$$