Instituto de Matemática - IM/UFRJ

Cálculo I - MAC118

Gabarito P3 - Prova A - 11/07/2023

Duração: 2h

Marque as respostas com clareza nas questões 1-4.

Justifique as respostas nas questões 5-8.

Questão 1: (1 ponto)

Considere a integral $I = \int_0^1 x\,dx$. Indique, na respectiva caixinha, se cada uma das afirmativas é verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).

(a) $I = 2$. ☐

(b) $\frac{d}{dx}(I) = x$. ☐

(c) $I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2}$. ☐

(d) $I = \frac{x^2}{2}$. ☐

(e) I representa a área de um triângulo retângulo de hipotenusa $\sqrt{2}$. ☐

Justificativa:

(a) $I = 2$ – **FALSO**; pois $I = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

(b) $\frac{d}{dx}(I) = x$ – **FALSO**; pois I é um número.

(c) $I = \lim_{n\to\infty} \sum \frac{i}{n^2}$ – **VERDADEIRO**; Somas de Riemann.

(d) $I = \frac{x^2}{2}$ – **FALSO**; pois I é um número.

(e) I representa a área do triângulo... – **VERDADEIRO**; pelo gráfico.

Questão 2: (1 ponto)

Se $h(x) = \int_2^{x^2} e^{\frac{t^2}{2}}\,dt$, quanto vale $h'(\sqrt{2})$?

(a) 0. (b) e^2. (c) e^4. ~~(d)~~ $2\sqrt{2}e^2$. (e) $2\sqrt{2}e^4$.

Justificativa: Temos que $h(x) = f(g(x))$, onde $f(x) = \int_2^x e^{t^2/2}\,dt$ e $g(x) = x^2$. Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, sabemos que $f'(x) = e^{x^2/2}$. A derivada da função h é dada por $h'(x) = f'(g(x))g'(x) = 2xe^{x^4/2}$ e portanto $h'(\sqrt{2}) = \mathbf{2\sqrt{2}e^2}$. Alternativa correta **(d)**.

Questão 3: (1 ponto)

Calcule $\int_1^e 3x^2 \ln(x)dx$.

(a) $\frac{1}{3}(2e^3 - 1)$. ~~(b)~~ $\frac{1}{3}(2e^3 + 1)$. (c) $\frac{1}{9}(2e^2 - 1)$. (d) $\frac{1}{9}(2e^3 + 1)$. (e) $\frac{1}{9}(1 - 3e^2)$.

Justificativa: Esta integral é resolvida utilizando integração por partes.

Sejam $u = \ln(x)$ e $dv = 3x^2\ dx$, temos que $du = \dfrac{1}{x}\ dx$ e $v = x^3$, logo

$$\int_1^e 3x^2 \ln(x)\, dx = x^3 \ln(x)\Big]_1^e - \int_1^e x^2\, dx = x^3 \ln(x) - \frac{x^3}{3}\Big]_1^e$$
$$= e^3 \ln(e) - \frac{e^3}{3} - 1^3 \ln(1) + \frac{1^3}{3} = \frac{\mathbf{2e^3+1}}{\mathbf{3}}.$$

Alternativa correta **(b)**.

Questão 4: (1 ponto)

A integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2\,\mathrm{arctg}(x)}{1+x^2}dx$

(a) vale $\dfrac{\pi^2}{2}$. (b) vale $\dfrac{\pi^2}{6}$. (c) vale $\dfrac{\pi^2-1}{4}$. (d) diverge. ~~(e)~~ vale $\dfrac{\pi^2}{4}$.

Justificativa: Por definição da integral imprópria,

$$\int_0^\infty \frac{2\arctan(x)}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{2\arctan(x)}{1+x^2}\, dx.$$

Para resolver a integral da direita, vamos fazer a substituição $u = \arctan(x)$, então $du = \frac{dx}{1+x^2}$ e portanto

$$\int_0^t \frac{2\arctan(x)}{1+x^2}\, dx = \int_0^{\arctan(t)} 2u\, du = u^2\Big|_0^{\arctan(t)} = \arctan^2(t) - \arctan^2(0), \text{ logo}$$

$$\int_0^\infty \frac{2\arctan(x)}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to\infty} \arctan^2(t) - \arctan^2(0) = \frac{\boldsymbol{\pi^2}}{\mathbf{4}}.$$

Alternativa correta **(e)**.

Questão 5: (1 ponto)

Encontre uma equação da reta tangente à curva $y^2 + xy + x^2 = 7$ no ponto $(1, 2)$.

Solução: Derivando a equação implicitamente em relação a x, temos que

$$2yy' + y + xy' + 2x = 0 \Rightarrow y' = \frac{-2x-y}{2y+x}.$$

Substituindo $x = 1$ e $y = 2$, descobrimos que $y' = \dfrac{-4}{4+1} = -\dfrac{4}{5}$.

Portanto uma equação da reta tangente é dada por $y - 2 = -\dfrac{4}{5}(x-1)$, reorganizando a equação encontramos $\mathbf{y} = -\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\mathbf{x} + \dfrac{\mathbf{14}}{\mathbf{5}}$, ou $\mathbf{4x + 5y = 14}$.

Questão 6: (1.5 ponto)

Considere que a área superficial de um cubo está aumentando a uma taxa de $48\,m^2/s$. Quão rápido está aumentando o volume do cubo no instante em que seu lado tem comprimento $2\,m$?

Solução: Seja $\ell(t)$ o tamanho da aresta do cubo em metros no instante t segundos. Então a área do cubo é dada por $A(t) = 6\ell(t)^2$ e o volume por $V(t) = \ell(t)^3$. Sabemos que $48 = A'(t) = 12\ell(t)\ell'(t)$, como $\ell(t) = 2$, descobrimos que $\ell'(t) = 2$. Portanto $V'(t) = 3\ell(t)^2\ell'(t) = 3 \cdot 2^2 \cdot 2 = 24$, logo o volume está aumentando a uma taxa de $\mathbf{24m^3/s}$.

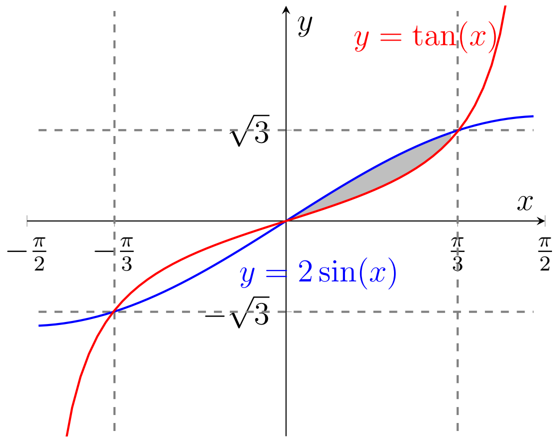
Questão 7: (1.5 ponto)

(a) Faça um esboço das curvas $y = 2\,\text{sen}(x)$ e $y = \tan(x)$ para x no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(b) Pinte a região delimitada por ambas as curvas e pelos pontos de interseção entre as curvas no **primeiro quadrante**.

(c) Calcule a área da região localizada no **primeiro quadrante**.

Solução: Se $2\,\text{sen}(x) = \tan(x)$, então $2\,\text{sen}(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$, logo $\text{sen}(x)(\frac{1}{2} - \cos(x)) = 0$. Disto concluimos que ou $\text{sen}(x) = 0$ e portanto $x = 0$, ou $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ e portanto $x = \dfrac{\pi}{3}$.



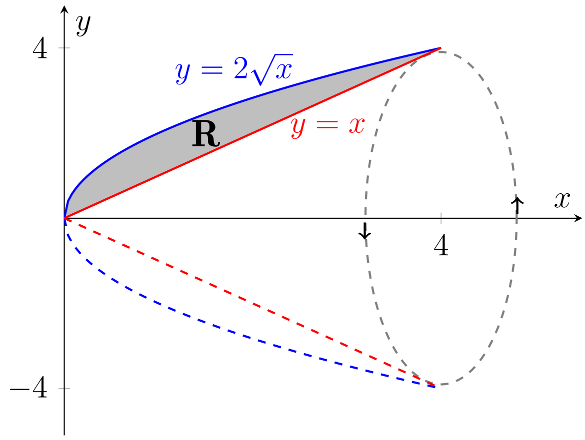
Para calcular a área no primeiro quadrante, temos que calcular a integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\,\text{sen}(x) - \tan(x)\,dx = \ln(|\cos(x)|) - 2\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2\frac{1}{2} - (\ln(1) - 2) = \mathbf{1} - \ln(\mathbf{2}).$$

Questão 8: (2 pontos)

Considere o sólido obtido por rotação da região R delimitada por $y = x$ e $y = 2\sqrt{x}$ ao redor do eixo x. Faça um esboço da região R, determine uma integral que representa o volume do sólido, e calcule o volume.

Solução: Primeiro precisamos achar o ponto de interseção das curvas $y = 2\sqrt{x}$ e $y = x$, isto é $2\sqrt{x} = x$, portanto $4x = x^2$, logo $x = 0$ ou $x = 4$.



A integral que representa o volume do sólido é

$$V = \int_0^4 \pi[(2\sqrt{x})^2 - x^2]\, dx.$$

Resolvendo a integral, temos que $V = \pi \left(2x^2 - \dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = \pi(32 - \frac{64}{3}) = \mathbf{\dfrac{32\pi}{3}}$.