Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo I - MAC118
P3 - Prova A - 11/07/2023

---

**Duração: 2h**
**Marque as respostas com clareza nas questões 1-4.**
**Justifique as respostas nas questões 5-8.**

**Questão 1:** (1 ponto)

Considere a integral $I = \int_0^1 x\,dx$. Indique, na respectiva caixinha, se cada uma das afirmativas é verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).

(a) $I = 2$. ☐

(b) $\frac{d}{dx}(I) = x$. ☐

(c) $I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2}$. ☐

(d) $I = \frac{x^2}{2}$. ☐

(e) $I$ representa a área de um triângulo retângulo de hipotenusa $\sqrt{2}$. ☐

**Questão 2:** (1 ponto)

Se $h(x) = \int_2^{x^2} e^{\frac{t^2}{2}}\,dt$, quanto vale $h'(\sqrt{2})$?

(a) 0. (b) $e^2$. (c) $e^4$. (d) $2\sqrt{2}e^2$. (e) $2\sqrt{2}e^4$.

**Questão 3:** (1 ponto)

Calcule $\int_1^e 3x^2 \ln(x) dx$.

(a) $\frac{1}{3}(2e^3 - 1)$. (b) $\frac{1}{3}(2e^3 + 1)$. (c) $\frac{1}{9}(2e^2 - 1)$. (d) $\frac{1}{9}(2e^3 + 1)$. (e) $\frac{1}{9}(1 - 3e^2)$.

**Questão 4:** (1 ponto)

A integral $\int_0^\infty \frac{2\,\mathrm{arctg}(x)}{1+x^2} dx$

(a) vale $\frac{\pi^2}{2}$. (b) vale $\frac{\pi^2}{6}$. (c) vale $\frac{\pi^2 - 1}{4}$. (d) diverge. (e) vale $\frac{\pi^2}{4}$.

**Questão 5:** (1 ponto)

Encontre uma equação da reta tangente à curva $y^2 + xy + x^2 = 7$ no ponto $(1, 2)$.

**Questão 6:** (1.5 ponto)

Considere que a área superficial de um cubo está aumentando a uma taxa de $48\,m^2/s$. Quão rápido está aumentando o volume do cubo no instante em que seu lado tem comprimento $2\,m$?

**Questão 7:** (1.5 ponto)

(a) Faça um esboço das curvas $y = 2\,\mathrm{sen}(x)$ e $y = \tan(x)$ para $x$ no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(b) Pinte a região delimitada por ambas as curvas e pelos pontos de interseção entre as curvas no **primeiro quadrante**.

(c) Calcule a área da região localizada no **primeiro quadrante**.

**Questão 8:** (2 pontos)

Considere o sólido obtido por rotação da região $R$ delimitada por $y = x$ e $y = 2\sqrt{x}$ ao redor do eixo $x$. Faça um esboço da região $R$, determine uma integral que representa o volume do sólido, e calcule o volume.