Gabarito da segunda prova de Cálculo I Unificado da Universidade Federal do Rio de Janeiro.
Ano 2023.1, versão A, aplicada em 15/06/2023.

Páginas 1 e 2 trazem o gabarito na forma de uma prova feita à mão.
O restante das páginas traz explicações mais detalhadas e figuras para melhor visualização.

Universidade Federal do Rio de Janeiro
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CÁLCULO 1 UNIFICADO
SEGUNDA PROVA – A
2023-1

Nome: ______________________________ DRE: ______________

Assinatura: ____

Duração: 2 horas. Faça sua prova a lápis. **As questões 4, 5, 6 e 7 requerem justificativa.**
Faça primeiro no rascunho e depois coloque no espaço indicado da prova **com clareza e de forma legível!**
Boa prova!

QUESTÃO 1. (1 ponto) Seja $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x^5 + 2x^3 + 8x - 6$. Indique, na respectiva caixinha, se cada uma das afirmativas é verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).

(a) f é uma função crescente; $\boxed{V}$

(b) o máximo absoluto de f ocorre em $x = 2$; $\boxed{V}$

(c) f admite uma raiz no intervalo $[-1, 1]$; $\boxed{V}$

(d) o máximo absoluto de f ocorrem em $x = -2$; $\boxed{F}$

QUESTÃO 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = e^{x^2+2x}$.

(a) (1 ponto) Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 0$ na forma $y = ax + b$ e coloque nas caixas os valores que você encontrou para a e b. $\boxed{a = 2}$ $\boxed{b = 1}$

(b) (0,5 ponto) Encontre a aproximação linear $L(x)$ de $f(x)$ no ponto $x = 0$. $\boxed{L(x) = 2x + 1}$

(c) (0,5 ponto) Use a aproximação linear para estimar o valor de f em $x = 0,2$. $\boxed{f(0,2) \approx 1.4}$

QUESTÃO 3. (1 ponto) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função derivável tal que $f(1) = 1$ e $f'(1) = 2$.

Calcule $g'(1)$, onde $g(x) = \dfrac{f(x)}{2x^2 + x + 1}$. $\boxed{g'(1) = \dfrac{3}{16}}$

QUESTÃO 4. (1 ponto) Seja $g(x) = \ln\big(f(x)\big)$ derivável, $g(4) = 2$ e $g'(4) = 5$. Calcule $d = f'(4) - f(4)$.

$g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow 5 = \dfrac{f'(4)}{f(4)}$, e $g(4) = \ln(f(4)) \Rightarrow 2 = \ln(f(4)) \Rightarrow$

Então: $f(4) = e^2$, e $f'(4) = 5f(4) = 5e^2$.

Logo: $d = f'(4) - f(4) = 5e^2 - e^2 = \boxed{4e^2}$ $\boxed{d = 4e^2}$

QUESTÃO 5. (1 ponto) Encontre a e b reais que tornem a expressão verdadeira: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos(3x)}{x^2} + a + \dfrac{b}{x^2}\right) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(3x) + ax^2 + b}{x^2} = 0 \Rightarrow$ precisamos $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(3x) + ax^2 + b) = 0$

$\Rightarrow \cos(0) + a \cdot 0 + b = 0 \Rightarrow \underline{b = -1}$. Então $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(3x) + ax^2 - 1}{x^2} \stackrel{H}{=}$ "$\frac{0}{0}$"

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-3\sin 3x + 2ax + 0}{2x} \stackrel{H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-9\cos 3x + 2a}{2} = -\dfrac{9}{2} + a$.

"$\frac{0}{0}$" Então $-\dfrac{9}{2} + a = 0 \Rightarrow \underline{a = \dfrac{9}{2}}$ $\boxed{a = 9/2}$ $\boxed{b = -1}$

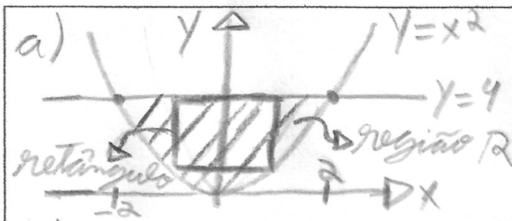
Questão 6. (2 ponto) Um retângulo com lados paralelos aos eixos coordenados deve ser inscrito na região R delimitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = 4$ de modo que seu perímetro seja máximo.
Justifique a resposta de cada item.

(a) Faça um desenho da região R incluindo o desenho de um retângulo inscrito (como o do enunciado).

(b) Supondo que a coordenada x do vértice inferior direito do retângulo seja s, escreva uma fórmula que expresse o perímetro P em termos de s.

(c) Calcule o valor de s que dá o valor máximo de P. Justifique que esse valor é realmente o máximo.

a)



b) $P = 2(s-(-s)+4-s^2)$

$P = 2(2s+4-s^2)$

c) $P'(s) = 2(2+0-2s) = 4-4s$. $P'(s^*)=0 \Rightarrow s^* = 1$

$s \in$	$(0,1)$	$(1,2)$
$P'(s)$	$+$	$-$
$P(s)$	$\nearrow$	$\searrow$

$\Rightarrow$ Então $s=1$ é ponto de máximo local. Como $P(0)=P(2)=8$ e $P(1)=10$, então $s=1$ é ponto de máximo absoluto em $[0,2]$.

Questão 7. (2 pontos) Seja $f(x) = \dfrac{1}{3x^2+1} + 1$. Então $f'(x) = \dfrac{-6x}{(3x^2+1)^2}$ e $f''(x) = \dfrac{6(9x^2-1)}{(3x^2+1)^3}$.
Justifique a resposta de cada item.

(a) Dê a equação das assíntotas verticais e horizontais de f, caso existam.

(b) Dê os intervalos onde a função f é crescente e onde é decrescente.

(c) Indique os pontos críticos de f e os valores máximo e/ou mínimo locais de f, se existirem.

(d) Determine os pontos de inflexão e descreva os intervalos onde a concavidade está para cima "$\smile$" e onde a concavidade está para baixo "$\frown$".

(e) Use as informações acima para fazer um esboço do gráfico de f no sistema de coordenadas abaixo.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ é A. Horizontal; $f(x)$ é contínua, então não tem A. Vertical.

b) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$x \in$	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Crescente: $x \in (-\infty,0)$

Decrescente: $x \in (0,+\infty)$

c) $f'(x)$ sempre existe, $f'(0)=0$. Então $x=0$ é ponto crítico, e é ponto de máximo (teste da 1ª derivada) com $f(0)=2$

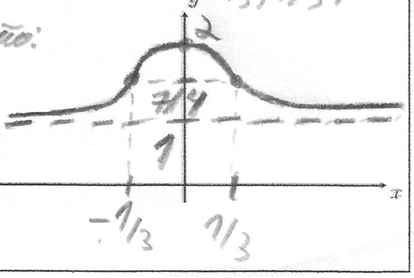
d) $f''(x)$ sempre existe e $f''(x)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 9x^2-1=0 \Rightarrow x=-1/3$ e $x=1/3$

$x \in$	$(-\infty,-\frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3},+\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Conc. p/ cima: $x \in (-\infty,-\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3},+\infty)$

Conc. p/ baixo: $x \in (-1/3, 1/3)$

Pontos de inflexão: $x = -\frac{1}{3}$ e $x = \frac{1}{3}$, $f(-1/3) = f(1/3) = 7/4$



QUESTÃO 1. (1 ponto) Seja $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x^5 + 2x^3 + 8x - 6$. Indique, na respectiva caixinha, se cada uma das afirmativas é verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).

(a) f é uma função crescente; $\boxed{\mathbf{V}}$

(b) o máximo absoluto de f ocorre em $x = 2$; $\boxed{\mathbf{V}}$

(c) f admite uma raiz no intervalo $[-1, 1]$; $\boxed{\mathbf{V}}$

(d) o máximo absoluto de f ocorrem em $x = -2$; $\boxed{\mathbf{F}}$

Solução:

Derivando: $f'(x) = 15x^4 + 6x^2 + 8$. Vemos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in [-2, 2]$, logo $f(x)$ é crescente.

A função $f(x)$ é contínua e está definida em um intervalo fechado. Como $f(x)$ é crescente, seu máximo absoluto ocorre no maior valor de x do intervalo de seu domínio: $x = 2$.

Vemos que $f(-1) = -3-2-8-6 < 0$ e $f(1) = 3+2+8-6 > 0$, logo pelo Teorema do Valor Intermediário podemos afirmar que existe pelo menos um valor $x = c$ no intervalo $(-1, 1)$ onde $f(c) = 0$ (adicionalmente, como $f(x)$ é crescente, temos apenas essa raiz).

QUESTÃO 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = e^{x^2+2x}$.

(a) (1 ponto) Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 0$ na forma $y = ax+b$ e coloque nas caixas os valores que você encontrou para a e b. $\boxed{a = \mathbf{2}}$ $\boxed{b = \mathbf{1}}$

(b) (0,5 ponto) Encontre a aproximação linear $L(x)$ de $f(x)$ no ponto $x = 0$. $\boxed{L(x) = \mathbf{2x + 1}}$

(c) (0,5 ponto) Use a aproximação linear para estimar o valor de f em $x = 0{,}2$. $\boxed{f(0{,}2) \approx \mathbf{1{,}4}}$

Solução:

Temos que $f(0) = 1$. E derivando: $f'(x) = e^{x^2+2x} \cdot (2x + 2) \implies f'(0) = 2$.

Equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ em $x = 0$:

$$f'(0) = \frac{y - f(0)}{x - 0} \implies 2 = \frac{y-1}{x} \implies y = 2x + 1$$

Logo a aproximação linear em $x = 0$ é $L(x) = 2x + 1$. E assim: $f(0.2) \approx L(x) = 2 \cdot 0.2 + 1 = 1.4$.

QUESTÃO 3. (1 ponto) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função derivável tal que $f(1) = 1$ e $f'(1) = 2$.

Calcule $g'(1)$, onde $g(x) = \dfrac{f(x)}{2x^2 + x + 1}$. $\boxed{g'(1) = \mathbf{\frac{3}{16}}}$

Solução:

$$g'(x) = \frac{f'(x)(2x^2 + x + 1) - f(x)(4x + 1)}{(2x^2 + x + 1)^2}$$

$$g'(1) = \frac{f'(1)(2 \cdot 1^2 + 1 + 1) - f(1)(4 \cdot 1 + 1)}{(2 \cdot 1^2 + 1 + 1)^2}$$

$$g'(1) = \frac{2 \cdot 4 - 1 \cdot 5}{4^2} = \frac{3}{16}$$

QUESTÃO 4. (1 ponto) Seja $g(x) = \ln\big(f(x)\big)$ derivável, $g(4) = 2$ e $g'(4) = 5$. Calcule $d = f'(4) - f(4)$.

Solução:

Usando a condição $g(4) = 2$, obtemos: $2 = g(4) = \ln(f(4)) \Rightarrow f(4) = e^2$.

Derivando a função $g(x)$ e usando a condição $g'(4) = 5$, obtemos: $5 = g'(4) = \dfrac{f'(4)}{f(4)} \Rightarrow f'(4) = 5e^2$.

Concluímos que $d = 4e^2$.

QUESTÃO 5. (1 ponto) Encontre a e b reais que tornem a expressão verdadeira: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(3x)}{x^2} + a + \frac{b}{x^2}\right) = 0$.

Solução:

Somando as frações, o enunciado nos informa que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(3x) + ax^2 + b}{x^2}\right) = 0$. Considerando que a e b são números reais, para que isso seja verdade precisamos necessariamente que: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\big(\cos(3x) + ax^2 + b\big) = 0$.

Veja que os seguintes limites existem separadamente: $\exists \displaystyle\lim_{x\to 0} \cos(3x)$, $\exists \displaystyle\lim_{x\to 0} ax^2$, $\exists \displaystyle\lim_{x\to 0} b$. Então podemos aplicar a propriedade do limite de uma soma (e além disso, nos 3 limites, as funções são contínuas em $x = 0$)

$$\lim_{x\to 0}\big(\cos(3x) + ax^2 + b\big) = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\cos(3x) + \lim_{x\to 0} ax^2 + \lim_{x\to 0} b = 0$$

$$\cos(0) + a \cdot 0^2 + b = 0$$

$$1 + 0 + b = 0 \implies b = -1$$

Então, estabelecido $b = -1$, o limite do enunciado nos leva à forma indeterminada "$\frac{0}{0}$". Usamos então a Regra de L'Hôpital (usaremos duas vezes, já que a forma indeterminada "$\frac{0}{0}$" se mantém; o símbolo $\overset{H}{=}$ significa cada uso):

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(3x) + ax^2 - 1}{x^2}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-3\,\mathrm{sen}(3x) + 2ax + 0}{2x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-9\cos(3x) + 2a}{2} = \frac{-9\cos(3\cdot 0) + 2a}{2} = -\frac{9}{2} + a$$

E segundo o enunciado, esse limite vale zero. Então: $-\dfrac{9}{2} + a = 0 \implies a = \dfrac{9}{2}$.

Alternativas:

Ao invés do segundo uso da Regra de L'Hôpital, também poderíamos ter usado o limite trigonométrico fundamental $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x} = 1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3\,\mathrm{sen}(3x)}{2x} = -\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(3x)}{x}\cdot\frac{3}{3} = -\frac{9}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(3x)}{3x} = -\frac{9}{2}\cdot 1 = -\frac{9}{2}$$

Ou ainda, poderíamos não usar a Regra de L'Hôpital nenhuma vez, e aplicar a seguinte identidade trigonométrica: $\cos(2\theta) - 1 = -2\mathrm{sen}^2(\theta)$, para enfim usar o limite trigonométrico fundamental:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x) - 1}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{-2\mathrm{sen}^2\left(\frac{3x}{2}\right)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0} -2\frac{3^2}{2^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)}{\frac{3x}{2}}\right)^2\\ &= -\frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Questão 6. (2 ponto) Um retângulo com lados paralelos aos eixos coordenados deve ser inscrito na região R delimitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = 4$ de modo que seu perímetro seja máximo.
Justifique a resposta de cada item.

(a) Faça um desenho da região R incluindo o desenho de um retângulo inscrito (como o do enunciado).

(b) Supondo que a coordenada x do vértice inferior direito do retângulo seja s, escreva uma fórmula que expresse o perímetro P em termos de s.

(c) Calcule o valor de s que dá o valor máximo de P. Justifique que esse valor é realmente o máximo.

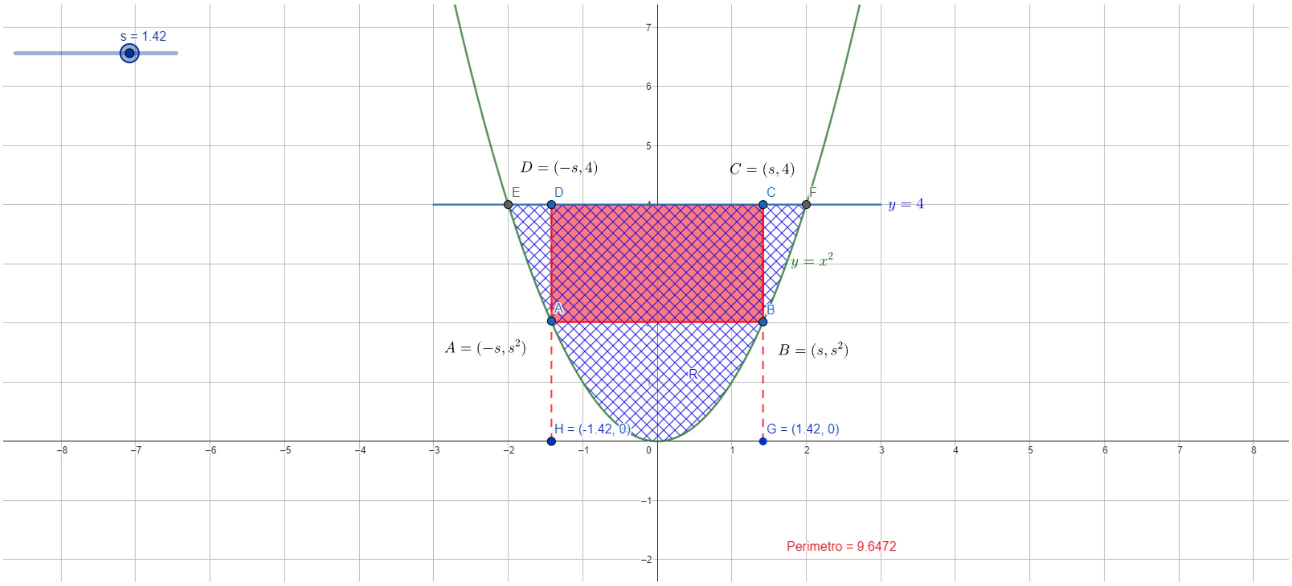


Figura 1: Em azul a região R delimitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = 4$, e em vermelho o retângulo inscrito.

Solução

(a) Ver a Figura 1 (Para ver o gráfico no Geogebra faça um click aqui.)

(b) Na intersecção dos gráficos temos $y = x^2 = 4$, obtendo os pontos $E = (-2, 4)$ e $F = (2, 4)$. Como a região R é um retângulo, seu perímetro P é dado por $2(\overline{AB} + \overline{BC})$, portanto

$$P(s) = 2(2s + (4 - s^2)) = -2s^2 + 4s + 8, \quad s \in [0, 2].$$

(c) Como $P(s)$ é um polinômio (derivada existe em todos os pontos), os pontos críticos acontecem quando: $P'(s) = -4s + 4 = 0$, logo $s = 1$ é o único ponto crítico de $P(s)$ no intervalo $(0, 2)$. Observe também que $P''(s) = -4 < 0$ logo a curva é côncava para baixo. Portanto $P(1) = 10$ é o valor máximo absoluto de $P(s)$.

Poderiamos usar também o método do intervalo fechado. Calculamos os valores de P nas bordas do intervalo e também no ponto crítico: $P(2) = P(0) = 8$, $P(1) = 10$. Pelo método do intervalo fechado o máximo entre eles ocorre quando $s = 1$, portanto $P(1)$ é um valor máximo absoluto de $P(s)$, $s \in [0, 2]$

Observação: O retângulo no ponto $s = 2$ corresponde ao segmento $\overline{EF}$, e no ponto $s = 0$ corresponde ao segmento $[0, 4]$ no eixo y).

Questão 7. (2 pontos) Seja $f(x) = \dfrac{1}{3x^2+1} + 1$. Então $f'(x) = \dfrac{-6x}{(3x^2+1)^2}$ e $f''(x) = \dfrac{6\left(9x^2-1\right)}{(3x^2+1)^3}$.
Justifique a resposta de cada item.

(a) Dê a equação das assíntotas verticais e horizontais de f, caso existam.

(b) Dê os intervalos onde a função f é crescente e onde é decrescente.

(c) Indique os pontos críticos de f e os valores máximo e/ou mínimo locais de f, se existirem.

(d) Determine os pontos de inflexão e descreva os intervalos onde a concavidade está para cima "$\smile$" e onde a concavidade está para baixo "$\frown$".

(e) Use as informações acima para fazer um esboço do gráfico de f no sistema de coordenadas abaixo.

Solução.

(a) Note que f, f' e f'' estão definidas em todo ponto real, isto é: $\text{Dom}\, f = \text{Dom}\, f' = \text{Dom}\, f'' = \mathbb{R}$.
Como $1 < f(x) \leq 2$, isto implica que f não possui assíntotas verticais.

Por outro lado como $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{3x^2+1} = 0$, temos que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$. Portanto $y = 1$ é uma assíntota horizontal de f.

(b) Usando a expressão de f' observamos que $f'(x) > 0$ se $x < 0$, logo f é crescente em $(-\infty, 0)$ e $f'(x) < 0$ se $x > 0$, logo f é decrescente em $(0, \infty)$.

(c) Como $\text{Dom}\, f' = \mathbb{R}$ os pontos críticos de f acontecem quando $f'(x) = 0$, o qual implica que $x = 0$ é o único ponto crítico de f. Pelo item (2) como f é crescente em $(-\infty, 0)$ e decrescente em $(0, \infty)$ concluimos que $x = 0$ é um ponto de máximo absoluto e local, com $f(0) = 2$. Notamos que pelo item (1) também temos que $\text{Im}\, f = (1, 2]$.

(d) Usando a expressao de f'' tem-se que $f''(x) > 0$ se $9x^2 - 1 > 0$, logo f é côncava para cima se $|x| > \frac{1}{3}$, isto é se $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$.

Também $f''(x) < 0$ se $9x^2 - 1 < 0$, logo f é côncava para baixo se $|x| < \frac{1}{3}$, isto é se $x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Similarmente $f''(x) = 0$ se $9x^2 - 1 = 0$, logo os pontos de inflexão acontecem quando $|x| = \frac{1}{3}$, isto é quando $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{3}$.

(e) Ver a Figura 2 (Para ver o gráfico no Geogebra faça um click aqui.)

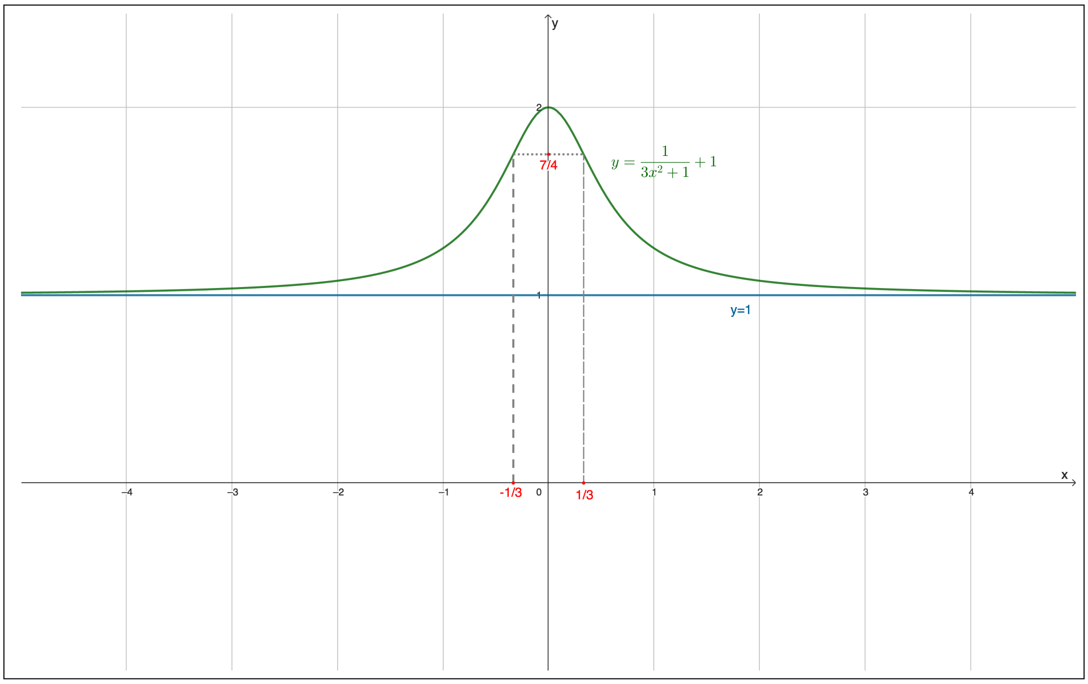


Figura 2: Em verde a curva definida por $f(x) = \dfrac{1}{3x^2+1} + 1$.