1ª Questão: (4.0 pts) Faça o que se pede nos itens abaixo, indicando a solução no espaço adequado no seu caderno de respostas. As soluções devem ser sucintas e a resposta final deve estar destacada do restante da solução.

I) (0.5) Calcule o limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$.

II) (0.5) Considere a função abaixo:

$$f(x) = \begin{cases} -ax+3, & \text{se } 0 \le x \le 2 \\ x-b, & \text{se } 2 < x \le 3, \\ 2, & \text{se } 3 < x \le 4. \end{cases}$$

Encontre valores de a e b de modo que f seja uma função contínua.

III) (1.0) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \tan(x^2)$ quando $x = \sqrt{\pi}$.

IV) (1.0) A população de uma colônia de bactérias 1 hora após o início da cultura é de 2018 células. Sabendo-se que a colônia inicialmente tinha 2 organismos, mostre que em algum instante de tempo entre 0 e 1 hora a taxa de crescimento dessa população foi de exatamente 2016 bactérias por hora.

V) (1.0) Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região entre as curvas $y = x^2+3$, $x=-2$, $x=2$ e $y=2$, em torno da reta $y=1$.

Resolução:

I) Resolução 1: O limite é indeterminado (do tipo "0/0"). Assim, podemos reescrever

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\right)\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}\right)\right\} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)-(1-x^2)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} = 1$$

Resolução 2: O limite é indeterminado (do tipo "0/0"). Assim, aplicamos a regra de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2} \overset{L'H.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}2x - \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{-1/2}+(1-x^2)^{-1/2}}{2} = 1$$

II) Para que f seja contínua em $x=3$, devemos impor $\lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$. Logo, $3-b=2$, ou seja, $b=1$.
Da mesma forma, devemos ter $\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$. Portanto, $-2a+3=1$, ou seja, $a=1$.

III) A equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto x_0 é dada por $y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Basta, portanto, calcularmos $f(\sqrt{\pi})$ e $f'(\sqrt{\pi})$. Assim, $f(\sqrt{\pi}) = \tan(\pi) = 0$ e $f'(\sqrt{\pi}) = 2x\sec^2(x^2)|_{x=\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\pi}\sec^2(\pi) = 2\sqrt{\pi}$. Logo,

$$y = 2\sqrt{\pi}(x-\sqrt{\pi}) \quad \text{ou} \quad y = 2\sqrt{\pi}x - 2\pi$$

IV) Pelo Teorema do Valor Médio, se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), então existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c) = \big(f(b)-f(a)\big)/(b-a)$. Assim, sendo $a=0$ e $b=1$, temos que existe ao menos um instante de tempo c entre 0 e 1 hora em que a taxa de crescimento da população é $f'(c) = (2018-2)/(1-0) = 2016$ bactérias/hora.

V) O volume do sólido externo será dado por

$$V_{ext} = \pi\int_{-2}^{2}((x^2+3)-1)^2dx = 2\pi\int_0^2(x^4+2x^2+4)dx = 2\pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+4x+C\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{752}{15}\pi$$

Desse volume deve ser retirado o volume do cilindro dado por $V_{int} = \pi\int_{-2}^{2}(2-1)^2dx = 4\pi$. O volume do sólido de revolução será, portanto, $V = V_{ext}-V_{int} = 692\pi/15$.

2ª Questão: (2.0 pts) Calcule as integrais: (1.5) a) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2}\, dx$ (0.5) b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{\text{sen}(x)} \cos(x)\, dx$

Resolução:

a) Fazendo a mudança de variável $u = -x^2$, temos $du = -2x\,dx$ e a integral indefinida se reescreve na forma

$$F(x) = \int x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int u e^u du$$

Integrando por partes,

$$F(x) = \frac{1}{2} u e^u - \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2} u e^u - \frac{1}{2} e^u + C = -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

Pelo segundo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_0^a x^3 e^{-x^2} dx = F(a) - F(0) = -\frac{1}{2} a^2 e^{-a^2} - \frac{1}{2} e^{-a^2} + \frac{1}{2}$$

Logo,

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a x^3 e^{-x^2} = \lim_{a\to\infty} \left\{ -\frac{1}{2} a^2 e^{-a^2} - \frac{1}{2} e^{-a^2} + \frac{1}{2} \right\}$$

Como os limites de cada um dos termos existem, o limite acima pode ser calculado como a soma dos limites.

$$\lim_{a\to\infty} a^2 e^{-a^2} = \lim_{a\to\infty} \frac{a^2}{e^{a^2}} \overset{L'H.}{=} \lim_{a\to\infty} \frac{2a}{2a e^{a^2}} = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{e^{a^2}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{a\to\infty} e^{-a^2} = 0$$

Portanto, $\displaystyle\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$.

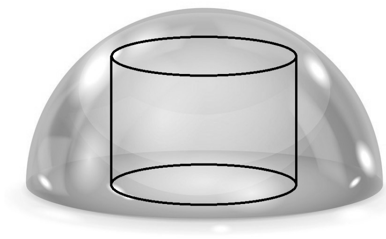
b) Fazendo a mudança de variável $u = \text{sen}(x)$, temos $du = \cos(x)\,dx$ e a integral indefinida se reescreve na forma

$$F(x) = \int e^{\text{sen}(x)} \cos(x)\, dx = \int e^u du = e^u + C = e^{\text{sen}(x)} + C$$

Pelo segundo Teorema Fundamental do Cálculo,

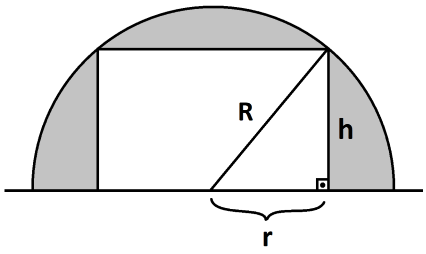
$$\int_0^{\pi/2} e^{\text{sen}(x)} \cos(x)\, dx = F(\pi/2) - F(0) = \left[e^{\text{sen}(x)} + C\right]_0^{\pi/2} = e - 1$$

3ª Questão: (2.0 pts) Deseja-se construir um reator nuclear em uma usina elétrica. O reator tem formato cilíndrico e será instalado dentro de uma cúpula semi-esférica de raio igual a 15 metros, conforme ilustra a figura abaixo. Determine o raio da base do cilindro de maior volume que pode ser instalado dentro da cúpula.



Resolução: O volume do cilindro é dado pela expressão $\pi r^2 h$, onde r é o raio da base e h é a altura. Estas duas variáveis estão relacionadas pela igualdade (ver imagem abaixo) $r^2 + h^2 = R^2$, onde R é o raio da cúpula. Podemos, portanto, escrever o volume unicamente em função de h, $V(h) = \pi R^2 h - \pi h^3$. A fim de encontrarmos o máximo da função volume, devemos impor

$$V'(h) = \pi R^2 - 3\pi h^2 = 0$$



Assim, $h = R/\sqrt{3}$, ou seja, o raio que maximiza volume do cilindro é $r = \sqrt{R^2 - h^2} = R\sqrt{2/3} = 15\sqrt{2/3} = 5\sqrt{6}$ metros.

Falta somente justificarmos que este valor de r corresponde, de fato, a um máximo da função V. Façamos assim o teste da segunda derivada: $V''(R/\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}\,\pi R < 0$. Ou seja, trata-se, de fato, de um ponto de máximo.

<u>Resolução alternativa:</u>

O volume do cilindro é dado pela expressão $\pi r^2 h$, onde r é o raio da base e h é a altura. Estas duas variáveis estão relacionadas pela igualdade (ver imagem acima) $r^2 + h^2 = R^2$, onde R é o raio da cúpula. Podemos, portanto, escrever o volume unicamente em função de r, $V(r) = \pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}$. A fim de encontrarmos o máximo da função volume, devemos impor

$$V'(r) = 2\pi r\big(R^2 - r^2\big)^{1/2} - \pi r^3\big(R^2 - r^2\big)^{-1/2} = 0$$

Assim, $2\big(R^2 - r^2\big) = r^2$, ou seja,

$$r = R\sqrt{2/3} = 5\sqrt{6} \text{ metros}$$

Falta somente justificarmos que este valor de r corresponde, de fato, a um máximo da função V.

O domínio desta função é $[0, R]$. Como ela é contínua nesse intervalo, ela tem (pelo Teorema de Weierstrass) ao menos um ponto de máximo. Como $V(0) = V(R) = 0$ e $V(x) > 0 \;\; \forall x \in (0, R)$, esse máximo deve estar em $(0, R)$. Como V é derivável $(0, R)$, esse ponto de máximo deve satisfazer (pelo Teorema de Fermat) $V'(r) = 0$. Como há somente um valor de r que satisfaz esta igualdade, ele é necessariamente o ponto de máximo que procuramos.

<u>Justificativa alternativa:</u> Para verificar que esse valor de r corresponde a um máximo da função V, façamos o teste da segunda derivada.

$$V''(r) = 2\pi\big(R^2 - r^2\big)^{1/2} - 2\pi r^2\big(R^2 - r^2\big)^{-1/2} - 3\pi r^2\big(R^2 - r^2\big)^{-1/2} - \pi r^4\big(R^2 - r^2\big)^{-3/2}$$

Assim, $V''(R\sqrt{2/3}) = -4\sqrt{3}\,\pi R = -60\sqrt{3}\,\pi < 0$. Ou seja, trata-se, de fato, de um ponto de máximo.

<u>4ª Questão:</u> (2.0 pts) Considere a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 12}{x + 3}$, sendo suas derivadas primeira e segunda dadas, respectivamente, por $f'(x) = \dfrac{x^2 + 6x}{(x+3)^2}$ e $f''(x) = \dfrac{18}{(x+3)^3}$. Siga o roteiro abaixo para esboçar um gráfico de f:

I) Encontre as raízes de f.

II) Encontre as assíntotas horizontais e verticais de f, caso existam.

III) Identifique os intervalos onde f é crescente e decrescente.

IV) Encontre os pontos de máximo e mínimo locais de f, caso existam.

V) Identifique os intervalos onde f é côncava para cima ou para baixo, e encontre os seus pontos de inflexão, caso existam.

VI) Com base nas informações acima, esboce um gráfico de f.

Resolução:

I) $f(x) = 0$ se, e somente se, $x^2 - 4x - 12 = 0$. As raízes têm, portanto, soma 4 e produto -12. Logo, são $x = -2$ e $x = 6$.

II) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Logo, não há assíntotas horizontais.

Há uma assíntota vertical no gráfico de uma função racional quando o denominador tem uma raiz que não é raiz também do numerador. Vemos que $x = -3$ é raiz do denominador e não é raiz do numerador. Assim, há somente uma assíntota vertical, em $x = -3$, com os limites laterais $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = +\infty$.

III) Construamos a tabela dos sinais de f':

sinais das funções	$x < -6$	$-6 < x < -3$ e $-3 < x < 0$	$x > 0$
$x^2 + 6x$	+	−	+
$(x + 3)^2$	+	+	+
$f'(x)$	+	−	+

Logo, f é crescente nos intervalos $(-\infty, -6)$ e $(0, +\infty)$; f é decrescente nos intervalos $(-6, -3)$ e $(-3, 0)$.

IV) $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x^2 + 6x = 0$. Ou seja, $x = -6$ e $x = 0$ são pontos críticos de f. Uma vez que $f''(-6) = -2/3$, a função f tem um máximo local em $x = -6$ e $y = f(-6) = -16$. Por outro lado, $f''(0) = 2/3$. Assim, a função f tem um mínimo local em $x = 0$ e $y = f(0) = -4$.

V) Construamos a tabela dos sinais de f'':

sinais das funções	$x < -3$	$x > -3$
18	+	+
$(x + 3)^3$	−	+
$f''(x)$	−	+

Logo, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -3)$ e côncava para cima no intervalo $(-3, +\infty)$. Não há pontos de inflexão, pois $f''(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\{-3\}$.

VI) A partir do item (I), podemos construir a tabela de sinais de f:

sinais das funções	$x < -3$	$-3 < x < -2$	$-2 < x < 6$	$x > 6$
$x^2 - 4x - 12$	+	+	−	+
$x + 3$	−	+	+	+
$f(x)$	−	+	−	+

Assim, temos as seguintes informações:

a) f é negativa, crescente e tem concavidade para baixo no intervalo $(-\infty, -6)$.

b) f tem um máximo local em $x = -6$, tomando o valor $y = -16$.

c) f é negativa, decrescente e tem concavidade para baixo no intervalo $(-6, -3)$.

d) f tem uma assíntota vertical em $x = -3$, com os limites laterais $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = +\infty$.

e) f é positiva, decrescente e tem concavidade para cima no intervalo $(-3, -2)$.

f) f tem uma raiz em $x = -2$.

g) f é negativa, decrescente e tem concavidade para cima no intervalo $(-2, 0)$.

h) f tem um mínimo local em $x = 0$, tomando o valor $y = -4$.

i) f é negativa, crescente e tem concavidade para cima no intervalo $(0, 6)$.

j) f tem uma raiz em $x = 6$.

k) f é positiva, crescente e tem concavidade para cima no intervalo $(6, +\infty)$.

Assim, o gráfico de f é dado por: