UFRJ - Instituto de Matemática
Instituto de Matemática
Departamento de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral I
Prova 2 - 02/07/2015

1ª Questão. Encontre o menor segmento de reta contido no primeiro quadrante ligando o eixo x ao eixo y e passando pelo ponto $P = (1, 2)$.

Resolução.

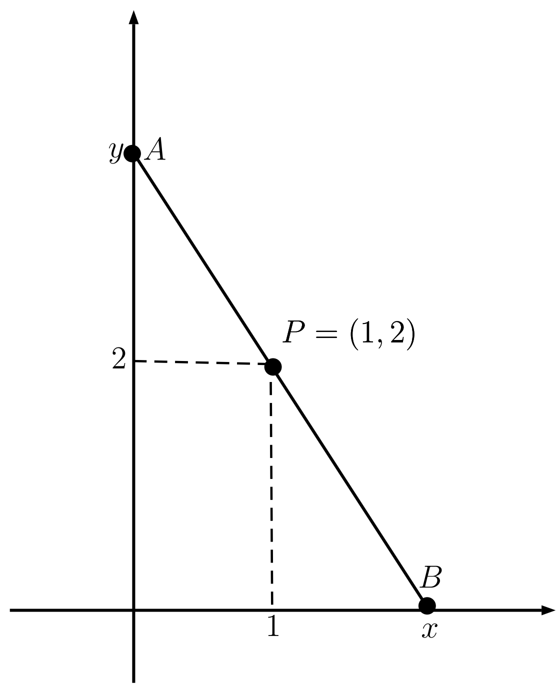

Figura 1: Figura referente a 1ª Questão.

Considere a Figura 1 acima. Por semelhança de triângulos, tem-se $\dfrac{y-2}{1} = \dfrac{2}{x-1}$, donde $y = 2(1 + \frac{1}{x-1})$. O comprimento $L = L(x)$ do segmento $\overline{AB}$ acima é dado por

$$L^2 = x^2 + y^2 = x^2 + 4(1 + \frac{1}{x-1})^2,$$

com $x \in (1, \infty)$. Temos que L é diferenciável em $(1, \infty)$ e a derivada $L'(x)$ satisfaz:

$$2L(x)L'(x) = 2x - \frac{8}{(x-1)^2}(1 + \frac{1}{x-1}) = 2x - \frac{8x}{(x-1)^3} = 2x(1 - \frac{4}{(x-1)^3}).$$

Note que $\lim_{x\to 1+} L(x) = \lim_{x\to +\infty} L(x) = +\infty$, donde afim de se encontrar os valores x onde $L(x)$ é mínimo, deve-se primeiramente resolver a equação $L'(x) = 0$, com $x > 1$. Assim, temos $1 - \dfrac{4}{(x-1)^3} = 0$, ou seja, $x = x_0 = 1 + \sqrt[3]{4}$, o que também nos dá $y = y_0 = 2(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}) = 2 + \sqrt[3]{2}$. Além disso, como $L(x) > 0$, temos que $L'(x) = \dfrac{x}{L(x)}(1 - \dfrac{4}{(x-1)^3})$ é negativo em $(1, x_0)$ e positivo em $(x_0, +\infty)$, o que conclui que L assume mínimo absoluto em $x_0 = 1 + \sqrt[3]{4}$. O segmento procurado é o segmento $\overline{AB}$, com $A = (1 + \sqrt[3]{4}, 0)$ e $B = (0, 2 + \sqrt[3]{2})$.

2ª Questão. Considere a função F dada por

$$F(x) = 3 + \int_2^x \frac{t-2}{t^2+5}\, dt.$$

Determine:

(a) Os intervalos onde F é crescente, onde F é decrescente e os máximos e mínimos locais, caso existam;

(b) Os intervalos onde o gráfico de F é côncavo para cima, onde é côncavo para baixo, e as abscissas dos pontos de inflexão, caso existam;

(c) Os extremos absolutos, caso existam.

Resolução. Primeiramente, note que $F(x)$ está bem definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Segue-se do Teorema Fundamental do Cálculo que F é diferenciável para todo x e

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_2^x \frac{t-2}{t^2+5}\, dt = \frac{x-2}{x^2+5}.$$

Como $x^2+5 > 0$, para todo x, temos que $F'(x) < 0$ se $x < 2$ e $F'(x) > 0$ se $x > 2$. Assim, F é decrescente em $(-\infty, 2)$ e F é crescente em $(2, +\infty)$. Temos assim que F assume um único mínimo (absoluto) em $x = 2$, $F(2) = 3$; além disso, F não possui máximos locais. Items (a) e (c) estão concluídos. Para se determinar as concavidades do gráfico de F, deve-se determinar a derivada segunda de F. Temos

$$F''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-2}{x^2+5}\right) = \frac{(x^2+5)-(x-2)2x}{(x^2+5)^2} = \frac{-x^2+4x+5}{(x^2+5)^2} = \frac{-(x+1)(x-5)}{(x^2+5)^2}.$$

Assim, $F'' > 0$ em $(-1,5)$ e $F'' < 0$ nos intervalos $(-\infty,-1)$ e em $(5,+\infty)$. Segue-se que o grafico de F é concavo para cima para $x \in (-1,5)$ e é concavo para baixo para $x \in (-\infty,-1)$ e para $x \in (5,+\infty)$. Como há mudança de concavidade em $x=-1$ e em $x=5$, temos que $P_1 = (-1, F(-1))$ e $P_2 = (5, F(5))$ são os pontos de inflexão do gráfico de F. Item (b) está concluido.

3ªQuestão. Considere a região R dada por

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \ \text{ e } \ 0 \leq y \leq x^2 e^{-x}\}.$$

(a) Determine, se possível, a área de R.

(b) Discuta a convergência da integral $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x} \sin^6(x)\, dx$.

Resolução. Primeiramente, vamos resolver a integral indefinida: $\int x^2 e^{-x} dx$. Faremos isto usando integração por partes em duas etapas. Primeiro, considerando $u = x^2$ e $dv = e^{-x}dx$, tem-se $du = 2xdx$ e $v = -e^{-x}$. Assim, $\int x^2e^{-x}dx = uv - \int vdu = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx$. Para resolver a integral indefinida $\int xe^{-x}dx$ faremos novamente uma integração por partes. Considerando $u = x$ e $dv = e^{-x}dx$, tem-se $du = dx$ e $v = -e^{-x}$, donde $\int xe^{-x}dx = uv - \int vdu = -xe^{-x} + \int e^{-x}du = -xe^{-x} - e^{-x} + C$, onde C é uma constante qualquer. Assim, segue-se que

$$\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) + C = -e^{-x}(x^2+2x+2) + C.$$

A área de R é dada pela integral imprópria: $\mathrm{Area(R)} = \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = \lim_{a\to+\infty}[-e^{-x}(x^2 + 2x+2)]|_0^a = 2 - \lim_{a\to+\infty} e^{-a}(a^2+2a+2)$. Aplicando-se duas vezes a regra de L'Hôpital, temos

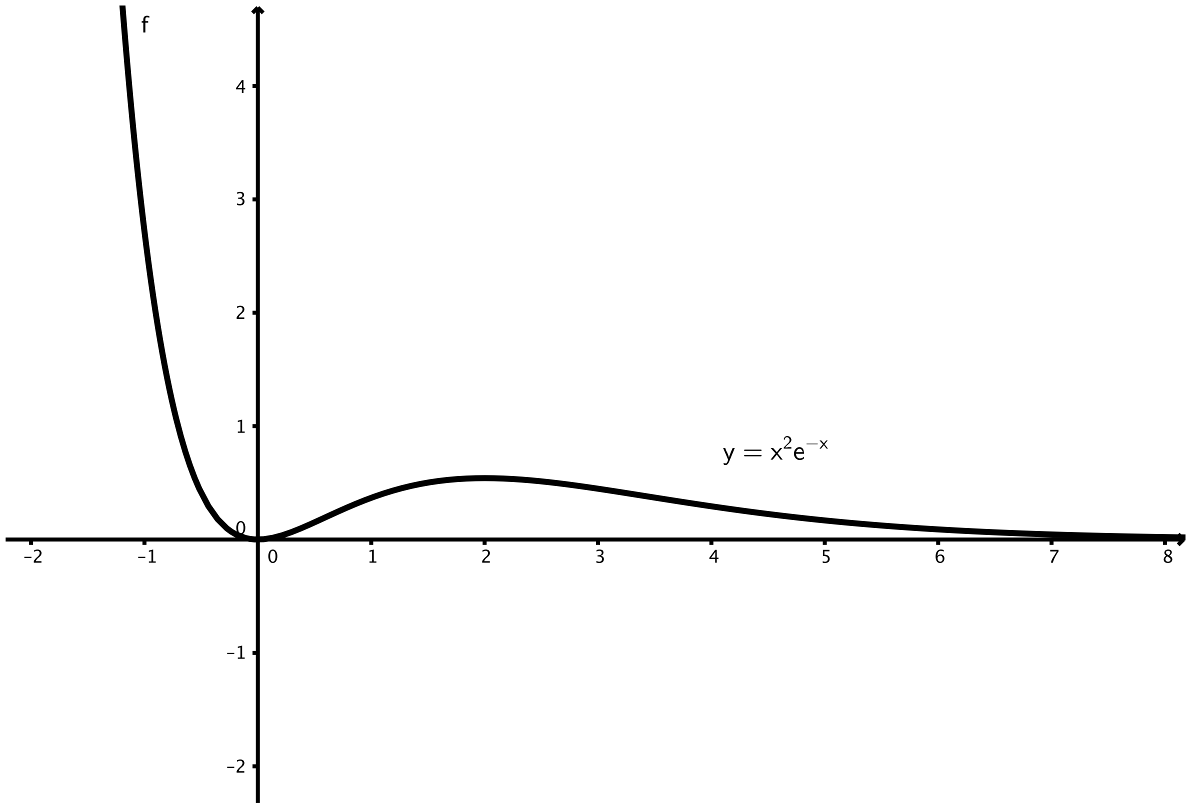

Figura 2: Figura referente à 3ª Questão. Grafico da função $y = x^2e^{-x}$.

$\lim_{a\to+\infty} \dfrac{a^2+2a+2}{e^a} = \lim_{a\to+\infty} \dfrac{2a+2}{e^a} = \lim_{a\to+\infty} \dfrac{2}{e^a} = 0$. Portanto, $\text{Area(R)} = 2$. Item (a) está concluído. Agora, usando que $0 \leq \sin^6(x) \leq 1$, temos $0 \leq x^2e^{-x}\sin^6(x) \leq x^2e^{-x}$. Logo, a convergência da integral $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x}\sin^6(x)\,dx$ segue-se do teste da comparação e do fato de que a integral imprópria $\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx$ é convergente. Item (b) está concluído.

4ª Questão. Considere a região R limitada pelas curvas

$$y = \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}} \quad , \quad y = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x = 1.$$

Determine o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo x.

Resolução.
As curvas $y = \dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}$ e $y = \dfrac{1}{2}$ se intersectam quando $(x+2)\sqrt{x+1} = 2$. Desenvolvendo vemos que isto acontece quando $x(x^2+5x+8) = 0$, isto é, somente quando $x = 0$, já que $x^2+5x+8 > 0$, para todo x. Note também que $(x+2)\sqrt{x+1} \geq 2$, para todo $x \geq 0$, donde $0 < \dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}} \leq \dfrac{1}{2}$, para todo $x \in [0,1]$.

Pelo método dos discos, o volume do sólido é calculado pela integral

$$V = \int_0^1 \pi\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}\right)^2\right]dx = \pi\int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{(x+2)^2(x+1)}\right]dx.$$

Para resolver a integral $\int_0^1 \dfrac{1}{(x+2)^2(x+1)}dx$ usaremos o método das frações parciais. Para isto, vamos que determinar constantes A, B e C de modo a satisfazer

$$\frac{1}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+1)}.$$

Para isto temos que resolver o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ 3A + B + 4C = 0 \\ 2A + B + 4C = 1. \end{cases}$$

Temos então, $A = B = -1$ e $C = 1$. Logo,

$$\int \frac{1}{(x+2)^2(x+1)}\, dx = -\ln|x+2| + \frac{1}{(x+2)} + \ln|x+1| + D,$$

onde D é uma constante qualquer. Portanto,

$$V = \frac{\pi}{4} - \pi\left[\left(-\ln 3 + \frac{1}{3} + \ln 2\right) - \left(-\ln 2 + \frac{1}{2} + \ln 1\right)\right] = \pi\left[\frac{5}{12} + \ln 3 - \ln 4\right].$$