UFRJ - Instituto de Matemática
Instituto de Matemática
Departamento de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral I
Prova 1 - 07/05/2015

1ªQuestão. Resolva os itens abaixo:

(1) **(2 pontos)** Calcule o seguinte limite:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\ln(x)} \ln\big(\ln\big(1+\dfrac{1}{x}\big)\big)$

Solução:

$$\lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{\ln(x)} \ln\big(\ln\big(1+\tfrac{1}{x}\big)\big) \overset{\text{LH}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{x})}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \big[\tfrac{1}{\ln(1+\frac{1}{x})}\cdot\tfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(-\tfrac{1}{x})\big]$$
$$= \lim_{x\to\infty} \big[\tfrac{-1}{x\ln(1+\frac{1}{x})+\ln(1+\frac{1}{x})}\big]$$

Agora, observe que $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \overset{\text{LH}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1.$

Então, temos:

$$\lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{\ln(x)} \ln\big(\ln\big(1+\tfrac{1}{x}\big)\big) = \lim_{x\to\infty} \big[\tfrac{-1}{x\ln(1+\frac{1}{x})+\ln(1+\frac{1}{x})}\big] = \tfrac{-1}{1+0} = -1$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\sin^2(x)} \sin(\dfrac{1}{x^2})$

Solução:

Usando o limite fundamental $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\,(x)}{x} = 1$, vemos que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin(x)} = 1$

e que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\sin^2(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \big[x\dfrac{x}{\sin(x)}\dfrac{x}{\sin(x)}\big] = 0.$

Agora, usamos o Teorema do Confronto e que $\big|\sin(\frac{1}{x^2})\big| \leq 1$ para concluir que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin^2(x)} \sin(\frac{1}{x^2}) = \lim_{x\to 0} \big[x\big(\frac{x}{\sin(x)}\big)^2 \sin(\frac{1}{x^2})\big] = 0.$$

(2) **(2 pontos)** Determine o valor de c para que a função $f:(-\infty,2)\to\mathbb{R}$ definida abaixo seja contínua em $x=0$. Justifique sua resposta.

$$f(x) = \begin{cases} x+c, & \text{se } x \leq 0; \\ \left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)^{1/x}, & \text{se } 0 < x < 2. \end{cases}$$

Solução:
Para que $f(x)$ seja contínua em $x=0$, devemos ter que os limites laterais de $f(x)$ existem e são iguais a $f(0)=c$. Calculando os limites laterais de $f(x)$ obtemos:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x+c) = c$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\left(\tfrac{2+x}{2-x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(2+x)-\ln(2-x)}{x}} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(2+x)-\ln(2-x)}{x}} \overset{\text{LH}}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x}}{1}} = e^1 = e.\end{aligned}$$

Logo, devemos ter $c=e$.

2ªQuestão (2 pontos) Seja l a reta tangente à curva dada pela equação

$$x^{2/3}+y^{2/3}=4,$$

no ponto $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$. Calcule a área do triângulo formado por l e os eixos coordenados.

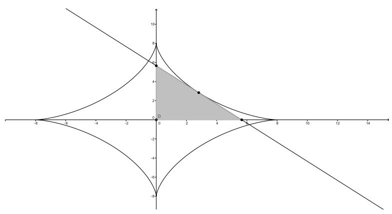
Solução:
Derivando a equação implicitamente em relação à x obtemos: $\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}\,y'=0$.

Da equação acima vemos que $y'=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$ e a inclinação da reta tangente à curva no ponto $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ será dada por $m=-\frac{(2\sqrt{2})^{1/3}}{(2\sqrt{2})^{1/3}}=-1$.

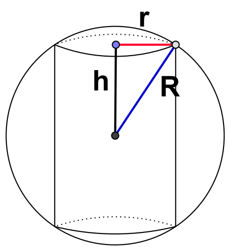
Assim, a reta tangente tem equação $y-2\sqrt{2}=-x+2\sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad y=-x+4\sqrt{2}$.

Essa reta corta os eixos em $(0,4\sqrt{2})$ e $(4\sqrt{2},0)$ e o triângulo terá, portanto, área $A=\frac{4\sqrt{2}.4\sqrt{2}}{2}=16$ u.a .

Veja, abaixo, uma figura ilustrativa:



3ªQuestão. (2 pontos) Um cilindro circular reto está inscrito em uma esfera. Se o raio da esfera cresce a uma taxa de 1 cm/s e o raio da base do cilindro cresce a uma taxa de 3 cm/s, com que razão está variando a área lateral do cilindro no momento em que o raio da esfera é 10 cm e o raio da base do cilindro é de 6 cm?



Solução:
Sejam R o raio da esfera, r o raio da base do cilindro, $2h$ a altura do cilindro e A a área lateral do cilindro.

Temos que $A = 2\pi r.2h$ e que $h^2 + r^2 = R^2$, logo $A = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2}$.

Derivando implicitamente a última equação em relação à t temos:

$A' = 4\pi r'\sqrt{R^2 - r^2} + \frac{4\pi r}{\sqrt{R^2-r^2}}(RR' - rr')$.

Fazendo $R' = 1$, $r' = 3$, $R = 10$ e $r = 6$ na equação acima temos $A = 72\pi$ cm$^2/s$

4ªQuestão. (2 pontos) Considere a função $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$. Mostre que a equação $f'(x) = 0$ possui exatamente três raízes reais distintas.

Solução:
$f(x)$ é contínua e derivável em $\mathbb{R}$. Em cada intervalo $[a, b]$, o Teorema do Valor Médio diz que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Observe que f satisfaz $f(-3) = f(-2) = f(-1) = f(0) = 0$. Fazendo $a = -3$ e $b = -2$, podemos usar o Teorema do Valor Médio para concluir que existe $c_1 \in (-3, -2)$ tal que $f'(c_1) = 0$.
Da mesma maneira, podemos concluir que existem $c_2 \in (-2, -1)$ e $c_3 \in (-1, 0)$ tais que $f'(c_2) = f'(c_3) = 0$. c_1, c_2 e c_3 são distintos. Como $f'(x)$ é um polinômio de grau três, $f'(x) = 0$ possui no máximo 3 raízes, logo, c_1, c_2 e c_3 são as únicas raízes.