Questão 1: (2.5 pontos)

(a) (0.5 ponto) Calcule $\lim_{h\to 0_+} h\ln\Big(\text{sen}\,(h)\Big)$.

(b) (1 ponto) Encontre a equação da reta tangente r ao gráfico da função $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\mathrm{e}^{x-1}\right)$ no ponto $P_0 = (1, 0)$.

(c) (1 ponto) Calcule $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$.

Solução:

(a) Em primeiro lugar, observe que $h\ln(\text{sen}\,(h)) = \frac{\ln(\text{sen}\,(h))}{1/h}$. Logo, segue usando a regra de l'Hospital e o limite fundamental $\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}\,(h)}{h} = 1$ que

$$\lim_{h\to 0_+}\frac{\ln\Big(\text{sen}\,(h)\Big)}{1/h} = \lim_{h\to 0_+} -\frac{h}{\text{sen}\,(h)}h\cos h = 0\,.$$

(b) Como $f(1) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, verificamos que o ponto P_0 pertence bem ao gráfico de f.

Vamos calcular o coeficiente angular da reta tangente r. Usando primeiro a regra da cadeia e em seguida a regra do produto, obtemos

$$f'(x) = -\text{sen}\,\left(\frac{\pi}{2}x\mathrm{e}^{x-1}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}x\mathrm{e}^{x-1}\right) = -\text{sen}\,\left(\frac{\pi}{2}x\mathrm{e}^{x-1}\right)\frac{\pi}{2}\Big(\mathrm{e}^{x-1}(1+x)\Big)\,.$$

Logo $f'(1) = -\pi$ e a reta tangente r é a reta de coeficiente angular $-\pi$ passando pelo ponto $(1, 0)$. Portanto sua equação é dada por:

$$y = -\pi(x-1).$$

(c) Fazendo $t = \sqrt{x}$ vem $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ ou $2tdt = dx$. Substituindo, obtemos

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int te^t\,dt.$$

Integramos agora por partes, usando $v' = e^t$, $u = t$, donde $v = e^t$ e $u' = 1$. Assim,

$$2\int te^t\,dt = 2te^t - 2\int e^t\,dt = 2te^t - 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C\,.$$

Questão 2: (1.5 ponto)

A área A de um quadrado está crescendo a uma taxa de 6 cm^2 por minuto. Quão rápido o tamanho do lado do quadrado cresce quando $A = 9$ cm^2?

Solução:

Seja l o tamanho do lado do quadrado. Assim, $A(l) = l^2$. Sabemos que $A' = 6$, pelo enunciado, isto é $(l^2)' = 2l'\cdot l = 6$. Quando $A = 9 = l^2$ temos que $l = \sqrt{9} = 3$. Substituindo em $2l'\cdot l = 6$

temos $l' = \dfrac{6}{2 \cdot l} = \dfrac{6}{2 \cdot 3} = 1$. Dessa forma o lado do quadrado cresce a uma taxa de 1 cm/min quando $A = 9\ cm^2$.

Questão 3: (2 pontos)
Considere a região $\mathcal{R}$ limitada pelas curvas $y = -x^3 - 1$, pelo eixo OY e pela reta $y = x + 1$.

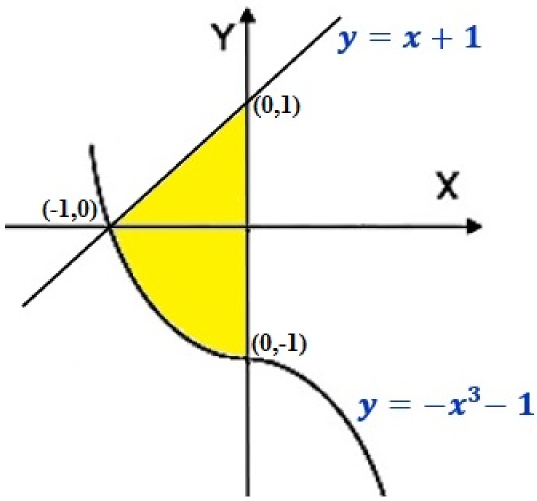
(a) (0.5 ponto) Faça um esboço da região $\mathcal{R}$.

(b) (0.5 ponto) Escreva uma **única integral** que expresse a área da região $\mathcal{R}$. **Não precisa calcular a integral**.

(c) (1 ponto) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região $\mathcal{R}$ em torno do **eixo** OY.

Solução:

(a)



- Interseção das curvas $y = -x^3 - 1$ e $y = x + 1$: $-x^3 - 1 = x + 1 \Rightarrow x^3 + x + 2 = 0$

  $\Rightarrow (x+1)(x^2 - x + 2) = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x^2 - x + 2 = 0$.

  Resolvendo $x^2 - x + 2 = 0$: $\Delta = 1 - 8 < 0$, logo $x = -1$ ($\Rightarrow y = 0$) é a única solução para interseção. Ponto $(-1, 0)$.

- Interseção das curvas $y = -x^3 - 1$ e $y = x + 1$ com o eixo Oy:

  a reta $y = x + 1$ intersecta o eixo Oy no ponto $(0, 1)$;

  a curva $y = -x^3 - 1$ intersecta o eixo Oy no ponto $(0, -1)$.

(b) Denotando por $A(\mathcal{R})$ a área da região $\mathcal{R}$, temos

$$A(\mathcal{R}) = \int_{-1}^{0} [x + 1 - (-x^3 - 1)]\, dx = \int_{-1}^{0} (x^3 + x + 2)\, dx\,.$$

(c) Seja V o volume procurado.

Método por seções transversais. Usando a fórmula de cálculo do volume de um sólido de revolução por seções transversais em torno do eixo Oy, obtemos que

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{0} (\sqrt[3]{-y-1})^2\, dy + \pi \int_{0}^{1} (y-1)^2\, dy \\ &= \pi \int_{-1}^{0} (y+1)^{\frac{2}{3}}\, dy + \pi \int_{0}^{1} (y-1)^2\, dy \\ &= \pi \frac{3}{5}\Big(y+1\Big)^{\frac{5}{3}}\Big|_{y=-1}^{y=0} + \pi \frac{1}{3}\Big(y-1\Big)^3\Big|_{y=0}^{y=1} = \pi\Big(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\Big) = \frac{14}{15}\pi\,. \end{aligned}$$

Método por cascas cilíndricas. Usando o método das cascas cilíndricas temos que

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-1}^{0} (-x)\Big[x + 1 - (-x^3 - 1)\Big] dx \\ &= -2\pi \int_{-1}^{0} x(x^3 + x + 2) dx \\ &= -2\pi \int_{-1}^{0} (x^4 + x^2 + 2x) dx \\ &= -2\pi \Big(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x^2\Big)\Big|_{-1}^{0} \\ &= -2\pi \Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 1\Big) = \frac{14}{15}\pi. \end{aligned}$$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

Duração da prova: duas horas e meia