Questão 1: (2 pontos)

Calcule as seguintes primitivas:

$$(\mathbf{a}) \int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{3/2}}\, dx \qquad \text{e} \qquad (\mathbf{b}) \int \frac{e^{2x}}{1 - e^{4x}} dx.$$

Solução:

(a) Escrevemos $\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^{3/2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx$. Com a substituição $u = \sqrt{x}$, donde $2udu = dx$, obtemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx = \int \frac{2u}{u(1+u^2)}\, du = 2\int \frac{1}{1+u^2}\, du = 2\arctan(u) + C = 2\arctan(\sqrt{x}) + C\,.$$

(b) Usando a substituição $y = e^{2x}$, achamos $dy = 2e^{2x}\, dx$. Assim,

$$\int \frac{e^{2x}}{1-e^{4x}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-y^2} dy\,.$$

Usando a técnica de frações parciais:

$$\frac{1}{1-y^2} = \frac{A}{1-y} + \frac{B}{1+y} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = A(1+y) + B(1-y),$$

de onde concluímos que $A = B = \frac{1}{2}$. Logo,

$$\int \frac{e^{2x}}{1-e^{4x}} dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right) dy = \frac{1}{4}\Big(-\ln|1-y| + \ln|1+y|\Big) + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}}\right| + C\,.$$

Observação: A partir da integral $\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-y^2} dy$ as substituições $y = \operatorname{sen} t$ ou $y = \cos t$ também conduzem à solução.

Questão 2: (1.5 ponto)

Considere as regiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ definidas a seguir.

- $\mathcal{R}_1$ é a região **do primeiro quadrante** $(x \geq 0,\ y \geq 0)$ limitada pela curva $x = y^2$, pelo eixo OX e pela reta $y = x - 2$.
- $\mathcal{R}_2$ é a região limitada curva $x = y^2$, pelo eixo OY e pela reta $y = 2$.

Sem calcular as integrais faça o que se pede a continuação.

(a) Faça um esboço de $\mathcal{R}_1$ e de $\mathcal{R}_2$.

(b) Escreva uma integral, ou uma soma de integrais, que expresse a área da região $\mathcal{R}_1$.

(c) Escreva uma integral, ou uma soma de integrais, que expresse o volume do sólido obtido pela rotação de $\mathcal{R}_1$ em torno do eixo OX.

(d) Escreva uma integral que expresse o volume do sólido obtido pela rotação de $\mathcal{R}_2$ em torno da reta $y = 2$.

Solução:

(**a**)

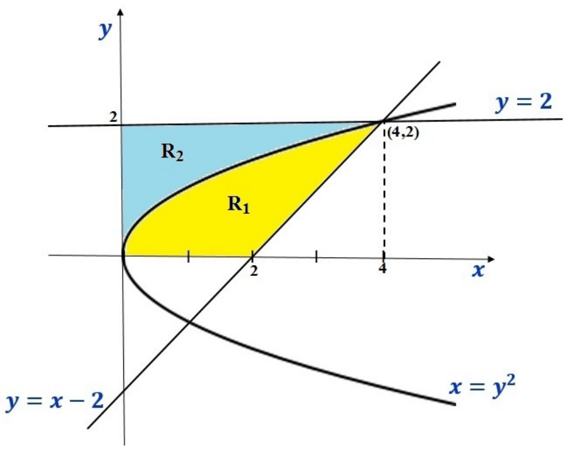

Figura 1

- Interseção das curvas $x = y^2$ e $y = x - 2$: $\quad y^2 = y + 2 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0$ $\Rightarrow (y-2)(y+1) = 0 \Rightarrow y = 2$ ou $y = -1$.

  Como a R_1 está no primeiro quadrante, consideramos apenas $y = 2$ ($\Rightarrow x = 4$). As curvas se intersectam no ponto $(4, 2)$.
- A reta $y = x - 2$ intersecta o eixo Ox no ponto $(2, 0)$.
- A curva $x = y^2$ intersecta o eixo Ox no ponto $(0, 0)$.

(**b**) Seja $A(R_1) :=$ área da região R_1.

Resolução 1. A parte da curva $x = y^2$ no primeiro quadrante é o gráfico da função $y = \sqrt{x}$.

$A(R_1)$ é a diferença entre as áreas das regiões B e C em que:

B é região sob o gráfico de $y = \sqrt{x}$, para $0 \le x \le 4$ $(y \ge 0)$;

C a área sob o gráfico de $y = x - 2$, para $2 \le x \le 4$ $(y \ge 0)$. Portanto

$$A(R_1) = A(B) - A(C) = \int_0^4 \sqrt{x}\, dx - \int_2^4 (x-2)\, dx\,.$$

Resolução 2. Olhando as curvas $x = f(y)$, a região R_1 está entre as curvas $x = y + 2$ e $x = y^2$ para $0 \le y \le 2$. Portanto

$$A(R_1) = \int_0^2 \big(y + 2\big)dy - \int_0^2 y^2 dy\,.$$

(**c**) O volume procurado V é a diferença entre o volume do sólido obtido pela rotação da região B em torno do eixo Ox e o volume do sólido obtido pela rotação da região C em torno do eixo Ox. Logo, segue pela fórmula do cálculo de volume de revolução por seções transversais que

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2\, dx - \pi \int_2^4 (x-2)^2\, dx.$$

(**d**) Seja W o volume procurado.

Resolução 1.

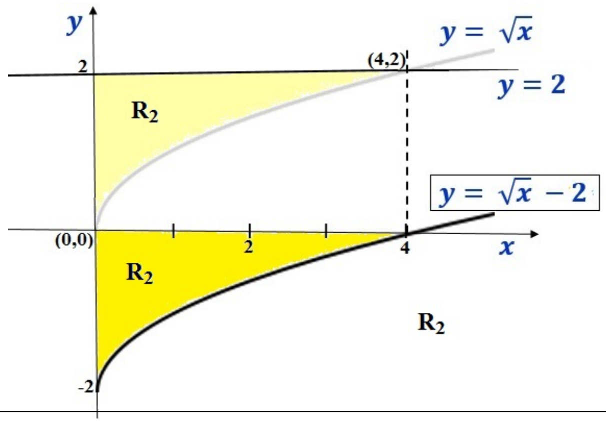

Figura 2

Como o eixo de revolução está 2 unidades acima do eixo Ox e o gráfico da função $y = f(x) = \sqrt{x}$ está abaixo do eixo, transladamos o gráfico da função 2 unidades abaixo do eixo Ox, criando a função $y = g(x) = \sqrt{x} - 2$. Assim, o raio de cada disco da revolução é igual a $g(x)$ (Figura 2). Então

$$W = \pi \int_0^4 (\sqrt{x} - 2)^2\, dx\,.$$

Resolução 2.

Como o eixo de revolução está no bordo da região, então, para cada x ($0 < x < 4$), a seção do sólido em x (perpendiculare ao eixo) é o disco de raio $2 - \sqrt{x}$. Então

$$W = \pi \int_0^4 (2 - \sqrt{x})^2 \, dx \,.$$

Questão 3: (1.5 ponto)

Calcule a integral $I = \displaystyle\int_{-2}^{2} \ln(|x|)dx$. Justifique todas as igualdades.

Solução:

Observe que a função $\ln(|x|)$ tem uma singularidade no ponto $x = 0$. Logo a integral I é uma integral imprópria e precisa ser calculada da seguinte maneira:

$$I = \lim_{B \to 0^-} \int_{-2}^{B} \ln(-x)dx + \lim_{A \to 0^+} \int_{A}^{2} \ln(x)dx = 2 \lim_{A \to 0^+} \int_{A}^{2} \ln(x)dx \,,$$

usando a mudança de varíavel $y = -x$ na primeira integral.

Calculamos uma primitiva de $\displaystyle\int \ln(x)dx$. Integrando por partes, temos

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int \frac{1}{x} x dx = x\ln(x) - x + C \,.$$

Logo,

$$I = 2 \lim_{A \to 0^+} \Big(x\ln(x) - x \Big)\Big|_{x=A}^{x=2} = 2 \lim_{A \to 0^+} \Big(2\ln(2) - 2 - A\ln(A) + A \Big) \,.$$

Usando a regra de l'Hôpital tem-se

$$\lim_{A \to 0^+} A\ln(A) = \lim_{A \to 0^+} \frac{\ln(A)}{1/A} = \lim_{A \to 0^+} \frac{1/A}{-1/A^2} = \lim_{A \to 0^+} (-A) = 0 \,.$$

Portanto, concluímos que $\boxed{I = 4(\ln(2) - 1).}$

Justifique todas as suas respostas! Apresente seus cálculos.

Duração da prova: duas horas e trinta minutos.