Questão 1: (2 pontos)

(**a**) (0.5 ponto) Calcule o seguinte limite sem usar a regra de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x+1}{x\sqrt{2x^2+1}}.$$

(**b**) (1 ponto) Ache os valores dos parâmetros A e B para que a função f seja contínua em $x=1$, onde f é definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right) + A & \text{se } x > 1\,, \\ 2 & \text{se } x = 1\,, \\ \frac{x^2-(B+1)x+B}{x-1} & \text{se } x < 1\,. \end{cases}$$

(**c**) (0.5 ponto) Calcule a derivada da função $f(x) = e^{\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}}$.

Solução:

(**a**) Calculamos, colocando em evidência os termos dominantes, no denominador e no numerador:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x+1}{x\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(3+2/x+1/x^2)}{x|x|\sqrt{2+1/x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+2/x+1/x^2}{\sqrt{2+1/x^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,.$$

(**b**) Para que f seja contínua em $x=1$ devemos ter

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = f(1) = 1.$$

Primeiramente calculamos $\lim_{x\to1^+} f(x)$. Temos que $-1 \leq \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x-1}\right) \leq 1$ para $x > 1$. Multiplicando a desigualdade por $(x-1)^2 \geq 0$ e somando A, obtemos

$$-(x-1)^2 + A \leq f(x) \leq (x-1)^2 + A\,,$$

para todo $x > 1$. Como $\lim_{x\to1^+} -(x-1)^2 + A = \lim_{x\to1^+} (x-1)^2 + A = A$, segue do Teorema do Confronto que $\lim_{x\to1^+} f(x) = A$. Logo, precisamos escolher $A = 2$ para que $\lim_{x\to1^+} f(x) = f(1)$.

Por outro lado, quando $x < 1$, escrevemos a função f na forma

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-B)}{x-1} = x - B \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} 1 - B\,.$$

Logo, precisamos escolher $B = -1$ para que $\lim_{x\to1^-} f(x) = f(1) = 2$.

(**c**) Usando a Regra da Cadeia e a regra do quociente, calculamos

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}}\right) = e^{\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}} \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}\right) = e^{\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}} \frac{(1+x^2)\cos(x) - 2x\operatorname{sen}(x)}{(1+x^2)^2}.$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Considere a função $y = f(x) = 2 + \dfrac{x}{1+x^2}$, cujas derivada e derivada segunda são dadas por

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}\,.$$

(**a**) (0.2 ponto) Calcule o domínio de definição de f.

(**b**) (0.3 ponto) Calcule as interseções do gráfico de f com os eixos coordenados caso existam.

(**c**) (0.5 ponto) Calcule os limites de f no infinito e ache as assíntotas horizontais e verticais ao gráfico de f caso existam.

(**d**) (0.5 ponto) Identifique os pontos críticos, os extremos relativos e os intervalos onde a função f é crescente e onde é decrescente.

(**e**) (0.5 ponto) Identifique os pontos de inflexão da função f e os intervalos de concavidade para cima e para baixo.

(**f**) (0.5 ponto) Usando as informações anteriores faça um esboço do gráfico de $y = f(x)$.

Solução:

(**a**) Sempre vale $1 + x^2 \geq 1$. Logo, o domínio de definição de f é igual a $\mathbb{R}$.

(**b**) $f(0) = 2$. Portanto a interseção do gráfico de f com o eixo Oy é o ponto $(0, 2)$.

Por outro lado, observamos que $-(1 + x^2) \leq x \leq 1 + x^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, o que implica que $f(x) = 2 + \frac{x}{1+x^2} \geq 2 - 1 = 1$. Em particular, o gráfico de f nunca encontra o eixo Ox

(**c**) Vale: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 + \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1/x}\right) = 2$ e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2 + \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x+1/x}\right) = 2$.

A reta $y = 2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f.

O gráfico de f não tem assíntota vertical.

(**d**) Analisamos o sinal de f'. Temos: $f'(x) = \dfrac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$. O sinal da derivada é , portanto, determinado pelo sinal do numerador, pois o denominador é sempre positivo. Teremos, então,

$$f'(x) = 0 \text{ se } x = -1 \text{ ou } 1, \quad f'(x) < 0, \text{ se } x < -1 \text{ ou } x > 1; \quad \text{e} \quad f'(x) > 0 \text{ se } -1 < x < 1.$$

Logo os pontos críticos de f são $\{-1, 1\}$, f é decrescente se $x < -1$ ou $x > 1$ e f é crescente se $-1 < x < 1$. Além disso, pelo teste da primeira derivada, $x = -1$ é um ponto de mínimo local e $x = 1$ é um ponto de máximo local.

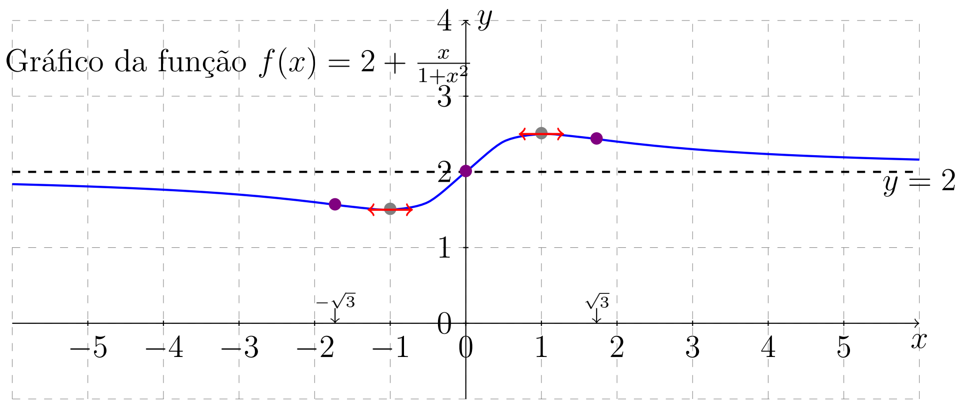
(**e**) Analisemos o sinal de f''. Temos: $f''(x) = \dfrac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}$. O sinal da derivada segunda é , portanto, determinado pelo sinal do numerador pois o denominador é sempre positivo. Teremos, então, $f''(x) = 0$ se $x = -\sqrt{3}$, 0 ou $\sqrt{3}$

$$f''(x) > 0 \text{ se } -\sqrt{3} < x < 0 \text{ ou } x > \sqrt{3}; \quad \text{e} \quad f''(x) < 0 \text{ se } x < -\sqrt{3} \text{ ou } 0 < x < \sqrt{3}.$$

Portanto, a concavidade é para cima se $-\sqrt{3} < x < 0$ e $x > \sqrt{3}$. A concavidade é para baixo se $x < -\sqrt{3}$ e $0 < x < \sqrt{3}$.

Os pontos $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ e $x = \sqrt{3}$ são pontos de inflexão.

(**f**) Usando as informações anteriores faça um esboço do gráfico de $y = f(x)$.



Questão 3: (1.5 ponto)

Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que as suas três primeiras derivadas são contínuas e $f(3) = f'(3) = 0$. Além disso, f satisfaz as seguintes propriedades:

- $f''(3) = 0$ e f'' não se anula fora de 3 ;
- $f'''(3) > 0$.

O que se pode concluir a respeito da concavidade do gráfico de f à direita e à esquerda de 3? Faça um esboço de um gráfico compatível com essas informações. Justifique a sua resposta.

Solução:

Primeira solução. Observe que como $f''(3) = 0$, 3 é um ponto crítico de f'.

Além disso, como f'' não se anula fora de 3, deduzimos do Teorema do Valor Intermediário que ou $f''(x) > 0$ para todos os $x > 3$, ou $f''(x) < 0$ para todos os $x > 3$.

Como $f'''(3) > 0$, deduzimos da continuidade de f''' que $f'''(x) > 0$ para x suficientemente próximo de 3 . Logo, f'' é uma função crescente em torno do ponto $x = 3$. Concluimos então que $f''(x) > 0$ para todos os $x > 3$ e $f''(x) < 0$ para todos os $x < 3$.

Em conclusão, f tem concavidade para cima no intervalo $(3, +\infty)$, f tem concavidade para baixo no intervalo $(-\infty, 3)$ e o ponto $x = 3$ é um ponto de inflexão da função f.

Segunda solução. Definimos $g = f'$. Então g tem as suas duas primeiras derivadas contínuas e $g'(3) = f''(3) = 0$, o que implica que 3 é um ponto crítico de g.

Além disso, $g''(3) = f'''(3) > 0$. Portanto, segue do teste da derivada segunda que g tem um mínimo local em $x = 3$.

Em particular, $g' = f''$ é positiva para $x > 3$ suficientemente próximo de 3 e $g' = f''$ é negativa para $x < 3$ suficientemente próximo de 3. Como f'' não se anula fora de 3, deduzimos do Teorema do Valor Intermediário que $f''(x) > 0$ para todos os $x > 3$, e $f''(x) < 0$ para todos os $x < 3$.

Em conclusão, f tem concavidade para cima no intervalo $(3, +\infty)$, f tem concavidade para baixo no intervalo $(-\infty, 3)$ e o ponto $x = 3$ é um ponto de inflexão da função f.

Terceira solução. Observe que como $f''(3) = 0$, 3 é um ponto crítico de f'.

Além, disso como f'' não se anula fora de 3, deduzimos do Teorema do Valor Intermediário que ou $f''(x) > 0$ para todos os $x > 3$, ou $f''(x) < 0$ para todos os $x > 3$.

Usando a hipótese $f'''(3) > 0$, vamos provar que $f''(x) > 0$ para todos os $x > 3$. De fato, se $f''(x) < 0$ para todos os $x > 3$, então vale $\frac{f''(x)-f''(3)}{x-3} < 0$ para todos $x > 3$. Deduzimos passando ao limite quando $x \to 3^+$ que $f'''(3) \leq 0$, o que é absurdo.

Similarmente, vemos que $f''(x) < 0$ para todos os $x < 3$.

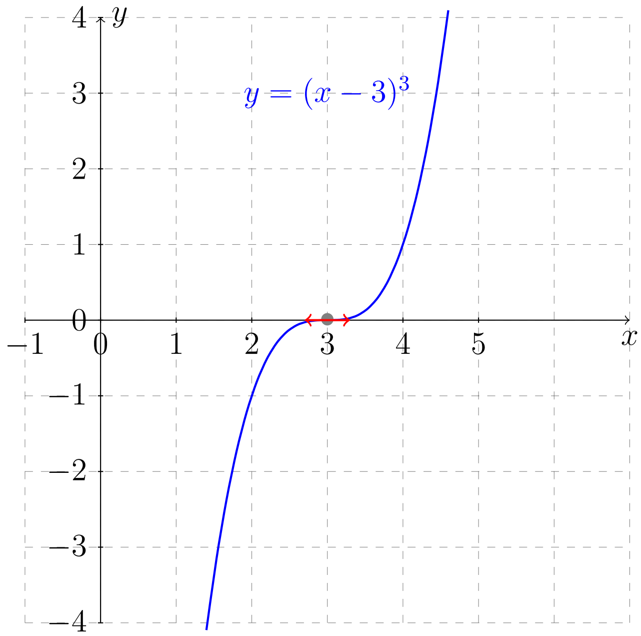
Em conclusão, f tem concavidade para cima no intervalo $(3, +\infty)$, f tem concavidade para baixo no intervalo $(-\infty, 3)$ e o ponto $x = 3$ é um ponto de inflexão da função f.

Observação: nessa terceira solução, não precisamos usar a hipótese de continuidade da terceira derivada de f em torno do ponto $x = 3$.

Observe que como $f(3) = 0$, o ponto $(3, 0)$ pertence ao gráfico de f, e que como $f'(3) = 0$, o gráfico de f tem uma tangente horizontal no ponto $(3, 0)$.

Além disso, acabamos de provar que f muda de concavidade em $x = 3$ e portanto $x = 3$ é um ponto de inflexão do gráfico de f. Cuidado, o fato que $f''(3) = 0$, não é suficiente para provar que 3 é um ponto de inflexão (pensar na função $f(x) = (x-3)^4$).

Uma função cujo gráfico é compatível com essas informações é $f(x) = (x-3)^3$. A seguir esboçamos seu gráfico.



Justifique todas as suas respostas!

Duração da prova: duas horas e meia